

9-ma'ruza: Predikatlar.

Ma'ruza mashg'ulotining rejasi:

1. **Predikatlar haqida umumiy tushuncha.**
2. **Predikat Mantiq yechimlarini isbotlash**
3. **Mantiq tahlikalari**
4. **Predikatlar inkori.**
5. **Predikatlar konyunksiyasi va dizaunksiyasi.**
6. **Predikatlar im'likatsiyasi va ekvivalensiyasi.**

Ma'ruza matni.

1. Predikatlar haqida umumiy tushuncha.

Ma'lumki, matematikada ishlatiladigan shunday muhim darak gaplar borki, ularni mulohaza deb bo'lmaydi. Masalan, agar biror butun son 2 ga bo'linmasa, u holda undan keyin kelgan butun son 2 ga bo'linadi' deb ayta olmaysiz. Chunki, bu darak gapning rostligi bir qiymatli aniqlanmagan. Faraz qilaylik, p – agar p 1 va 7 orasidagi 2 ga bo'linmaydigan butun son bo'lsa, u holda undan keyin kelgan butun son 2 ga bo'linadi' degan darak gap bo'lsin. Bu gapni quyidagicha ifodalash mumkin. Faraz qilaylik, $P(n)$ – agar n 2 ga bo'linmaydigan butun son bo'lsa, u holda $n+1$ soni 2 ga bo'linadi' degan darak gap bo'lsin. U holda, quyidagi yozuvga ega bo'lamiz:

$$p \leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7).$$

Yuqoridagi gapni bayon qilish uchun o'zgaruvchi kiritishga, ya'ni "predikat" tushunchasiga ehtiyoj tug'ildi.¹

1. Predikat Mantiq yechimlarini isbotlash

Agar siz mantiqiy hisoblash orqali predikat $P(x)$ to'g'ri ekanligini isbotlay olsangiz, u holda predikat hisoblash tasnifida $(Ax) P(x)$ to'g'ri hisoblanadi. Masalan, biz $P(x)$ va $P(x) \rightarrow Q(x,y)$ va $Q(x,y)$ haqiqiy usunlar ishlatgan holda va g'oyaviy hisoblashdagi kabi, Modus Ponens hisoblanadigan formulalarni isbotlay olamiz. Biz oddiy tarzda $P(x)$ nikesim kabi izohlangandan ko'ra yangi o'zgaruvchan formula ekanligini tahmin qilamiz. Bundan tashqari, agar x haqida bilmasdan turib $P(x)$ formulasini isbotlay olsak, demak $P(x)$ hamma x uchun to'g'ri bo'lishi kerak ekanligi manosini bildiruvchi $P(x) \rightarrow (Ax) P(x)$, bizda aniq aloqadorlik mavjud. Shuningdek, bu yerda x , $P(x) \rightarrow (Zx) P(x)$ ham bor.

Biroq, umumiy holatda narsalarni mantiqiy hisoblashdan ko'ra predikat hisoblash orqali isbot qilish ancha murakkab jarayondir. Nima bo'lganda ham bu bizlarni havotirga solmaydi, chunki matematika bilan aloqa sifatida ishlash, biz shug'ullanadigan narsalar qanday isbotlanishidan bizni ozod etadi, huddi biz telefonni ishlatish kabi, yani elektromagnit teoriyasi haqida hech narsani bilmasdan turib biz qaysi tugmani qachon bosishni yaxshi bilamiz.

3. Mantiq tahlikalari

¹Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, p.p.8-10 betlar mazmuni olingan

Biz Rasselning ilmiy qoidalarga mos kelmaydigan g'oya (paradoks) lariga keyinroq to'xtalib o'tamiz, lekin shu o'rinda predikat mantiq'ida uchrab turadigan chigal paradokslar haqida izoh berish muhim. Bu paradokslar Rasselning va boshqa to'plam nazariyasidagi paradokslardan ko'ra murakkabroq, chunki ularning oldini olish sezilarli darajada mushkuldir.

Predikat mantiqidagi eng muhim paradoks bu *Yolg'onchining Paradoksi* hisoblanadi. Soddagina aytganda *Yolg'onchining paradoksi* "Bu jumla noto'g'ri" demakdir. Birinchidan, bunday gap mulohaza mantiqining emas balki predikat mantiqining bir bo'lagi ekanligiga o'zingizni ishonтира olishingiz kerak. Shundan so'ng, agar bu jumla rost bo'lsa yolg'on bo'lishiga va yolg'on bo'lsa rost bo'lishiga ham o'zingizni ishonтираing. O'z navbatida bu shubhasiz ziddiyat hisoblanadi.

Mantiq olimlari noqonuniy o'ziga ishora qiladigan predikatlar orqali bu ziddiyatdan chiqib ketishga urinishdi. Lekin *Yolg'onchining paradoksi* dagi o'ziga ishora qilmaydigan shakli quyidagicha. Birinchi predikatni aniqlaymiz

$P739(x) = \text{predikat } P740 \text{ yolg'on}$

Keyin quyidagi predikatni shakllatiramiz

$P740(x) = \text{predikat } P739 \text{ rost.}$

Demak, agar $P739$ rost bo'lsa, u holda $P740$ yolg'on, bu $P739$ yolg'on ekanligini bildiradi. Shunday qilib $P739$ yolg'on bo'lishi kerak. Bizda $P740$ rost, demak $P739$ yolg'on. Bu jarayon ziddiyat deyiladi.

Yana bitta ishlash yuli predikat iyerarxiyalarini saqlashdir va bir xil yoki balandroq darajadagi predikatni anglatuvchi predikatni taqiqlash lozim. Lekin bungacha borishning bizga zaruriyati yo'q.

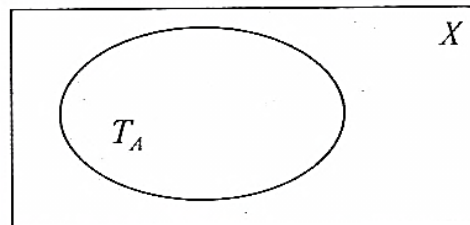
Mulohazalar algebrasining asosiy masalalaridan biri sodda mulohazalarning rostlik qiymatlariga tayangan holda, ulardan tuzilgan murakkab mulohazalarning rostlik qiymatlarini topishdan iborat ekanligini biz ko'rib chiqdik. Lekin mulohazalar algebrasi fan va amaliyotning murakkab mantiqiy xulosalarini chiqarish uchun yetarli emas. Bunday murakkab mantiqiy xulosalarni chiqarishda mulohazalar algebrasini ham o'z ichiga oluvchi predikatlar algebrasi muhim o'rin tutadi.

1-ta'rif. O'zgaruvchi qatnashgan va o'zgaruvchi o'rniga qiymatlar qo'yilgandagina rost yoki yolg'on mulohazaga aylanadigan darak gap predikat deyiladi.

Predikatlar tarkibiga kirgan o'zgaruvchilar soniga qarab bir o'rinli, ikki o'rinli va hokazo bo'ladi. Biz ko'roq bir o'rinli predikat haqida gapiramiz, uni $A(x)$, $B(y)$, ... ko'rinishda belgilaymiz.

Predikat tarkibiga kirgan o'zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlar to'plami predikatning aniqlanish sohasi deyiladi. Aniqlanish sohasi X , Y , Z , ... kabi belgilanadi.

O'zgaruvchi o'rniga qo'yilganda predikatni rost mulohazaga aylantiruvchi qiymatlar predikatning rostlik to'plami deyiladi, $A(x)$ predikatning aniqlanish sohasi X to'plam bo'lsa, rostlik to'plami T_A bilan belgilanadi va $x \in X$, $T_A \in X$ bo'ladi (1.18-rasm).



1.18-rasm.

Ta'rifga ko'ra istalgan tenglama yoki tengsizlik predikat bo'ladi. Masalan:

$A(x)$: « x shahar — O'zbekiston Respublikasining poytaxti». Bunda $X = \{\text{Toshkent, Buxoro, Xiva, Moskva}\}$ bo'lib, $T_A = \{\text{Toshkent}\}$ bo'ladi.

$B(x) : 5 < x < 11 \wedge x \in \mathbb{N}$.

$X = \mathbb{N}$ bo'lib, $T_B = \{6; 7; 8; 9; 10\}$ bo'ladi.

$C(y)$: « y — 10 sonning bo'luvchisi» bo'lsa, $Y = \mathbb{N}$ bo'lib, $T_C = \{1; 2; 5; 10\}$ bo'ladi.

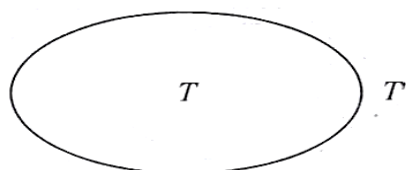
$D(z)$: « $z^2 + 2z - 1 = 0$ ». $z \in \mathbb{R} = \mathbb{Z}$. $T_D = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$.

Predikatlarni P , Q yoki $P(x)$, $Q(x, y)$, $R(x, y, z)$ ko'rinishida belgilashni kelishib olamiz.

Bir o'rinli predikatlar bilan to'liqroq tanishib chiqamiz. Predikatlar ustida ham mulohazalar ustida bajarilgan \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow amallarni kiritishimiz mumkin.²

4. Predikatlar inkori.

$M \neq \emptyset$ to'plamda aniqlangan bir o'rinli $P(x)$ - predikat berilgan bo'lsin. U holda $P(x)$ - predikatning inkori deb har qanday $x \in M$ element uchun $P(x)$ - predikat rost bo'lganda yolg'on bo'ladigan; $P(x)$ yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan $\neg P(x)$ predikatga aytiladi. Ya'ni, M ning ixtiyoriy elementi uchun $(\neg P)(x) = \neg (P(x))$ tenglik o'rinli bo'ladi.³



1.19-rasm.

X to'plamda $A(x)$ predikat berilgan bo'lsin. $A(x)$ rost bo'lganda yolg'on, yolg'on bo'lganda, rost bo'ladigan $\overline{A(x)}$ predikat $A(x)$ ning inkori deyiladi. $A(x)$ ning rostlik to'plami T_A bo'lsa, $\overline{A(x)}$ ning rostlik to'plami $T_{\overline{A}}$ bo'ladi (1.19-rasm).

Masalan: a) $A(x)$: « x son 5 raqami bilan tugaydi» bo'lsa, $\overline{A(x)}$: « x son 5 raqami bilan tugamaydi» bo'ladi.

$X = \{x \in \mathbb{N}, x < 20\}$ to'plamda $A(x)$: « x tub son» predikati berilgan bo'lsin. U holda $T_A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$ bo'ladi. $\overline{A(x)}$: « x tub son emas» va $T_{\overline{A}} = \{1; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 18\}$ bo'ladi.

$X = \{\forall x \in \mathbb{N}, x \leq 15\}$ da $A(x)$: « x soni 15 ning bo'luvchisi» predikat berilgan bo'lsin. U holda $T_A = \{1; 3; 5; 15\}$ bo'ladi. $\overline{A(x)}$: « x son 15 ning bo'luvchisi emas» va $T_{\overline{A}} = \{2; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$ bo'ladi.

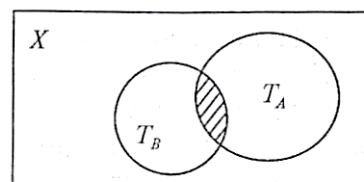
X — hafta kunlari to'plami bo'lsin. Bu to'plamda $A(x)$: « x — haftaning juft kuni» predikati berilgan bo'lsa, $\overline{A(x)}$: « x — haftaning toq kuni», $T_A = \{\text{seshanba, payshanba, shanba}\}$ va $T_{\overline{A}} = \{\text{yakshanba, dushanba, chorshanba, juma}\}$ bo'ladi.

²Hilbert. Advanced High-School Mathematics. 2011. 425s. 8-10 betlar mazmuni olingan

³Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, p.p.8-10 betlar mazmuni olingan.

5. Predikatlar konyunksiyasi. Aytaylik, X to'plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarining har ikkalasi rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan predikatga ularning konyunksiyasi deyiladi va $A(x) \wedge B(x)$ ko'rinishda belgilanadi. Agar $A(x)$ ning rostlik to'plami T_A , $B(x)$ ning rostlik to'plamini T_B , $A(x) \wedge B(x)$ ning rostlik to'plamini T desak, $T = T_A \cap T_B$ bo'ladi. Uni Eyler-Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak (I.20-rasm), rasmdagi shtrixlangan soha $T_A \cap T_B$ dan iborat bo'ladi.



I.20-rasm.

Masalan, a) $X = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}$ da $A(x)$: « x soni tub son», $B(x)$: « x soni toq son» predikatlar berilgan bo'lib, ularning konyunksiyasining rostlik to'plamini topish talab qilingan bo'lsin.

Yechish. $T_A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$, $T_B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19\}$, u holda $T = T_A \cap T_B = \{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$ bo'ladi.

$X = \{\forall x \in \mathbb{N}, x < 17\}$ da $A(x)$: « $x < 8$ » va $B(x)$: « $x > 3$ » predikatlar bo'lsa, ular konyunksiyasining rostlik to'plamini toping.

Yechish. $T_A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $T_B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ va $T = T_A \cap T_B = \{3; 6\}$ bo'ladi.

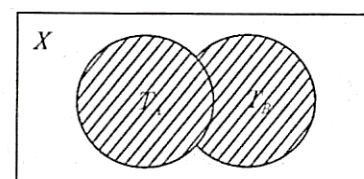
Predikatlar dizyunksiyasi. Aytaylik, X to'plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarining har ikkalasi yolg'on bo'lganda yolg'on, qolgan barcha hollarda rost bo'ladigan predikatga $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar dizyunksiyasi deyiladi.

Predikatlar dizyunksiyasi « $A(x) \vee B(x)$ » ko'rinishda belgilanib, « $A(x)$ yoki $B(x)$ » deb o'qiladi.

$A(x)$ predikatning rostlik to'plami T_A , $B(x)$ ning rostlik to'plami T_B , $A(x) \vee B(x)$ ning rostlik to'plamini T desak, $T = T_A \cup T_B$ bo'ladi.

Uni Eyler — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (I.21-rasm).



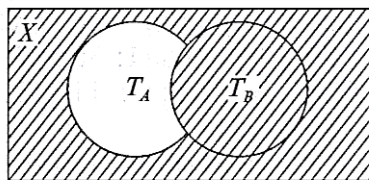
I.21-rasm.

Masalan: a) $X = \{\forall x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}$ da $A(x)$: « $8 \leq x \leq 15$ », $B(x)$: « x soni 18 ning bo'luvchisi» predikatlar berilgan bo'lsa, $A(x) \cup B(x)$ ning rostlik to'plamini toping.

Yechish. $T_A = \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$, $T_B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ bo'lgani uchun $T = T_A \cup T_B = \{1; 2; 3; 6; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 18\}$ bo'ladi. predikatlar im'likatsiyasi. X to'plamda aniqlangan $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. $A(x)$ predikat rost bo'lib, $B(x)$ predikat yolg'on bo'lganda yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan mulohaza $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarining implikatsiyasi deyiladi.

6. Predikatlar implikatsiyasi. « $A(x) \Rightarrow B(x)$ » ko'rinishda belgilanadi va u $A(x)$ predikatdan $B(x)$ predikat kelib chiqadi deb o'qiladi. Bu holda $B(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun «zaruriy shart», $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun «yetarli shart» deyiladi.



I.22-rasm.

$A(x)$ predikatning rostlik to'plami T_A , $B(x)$ niki T_B va $A(x) \Rightarrow B(x)$ ning rostlik to'plami T bo'lsa, $T = T'_A \cup T_B$ bo'ladi. Uni Eyer — Venn diagram- malari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (I.22-rasm).

Masalan, a) $X = \{\forall x \in \mathbb{N}, 12 \leq x \leq 21\}$ to'plamda $A(x)$: « x — tub son», $B(x)$: « x — toq son» predikatlari berilgan bo'lsa, $A(x) \Rightarrow B(x)$ ning rostlik to'plamini topaylik.

Yechish. $T_A = \{13; 17; 19\}$, $T_B = \{13; 15; 17; 19; 21\}$, $T'_A = \{12; 14; 15; 16; 18; 20; 21\}$ u holda $T = T'_A \cup T_B = \{12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21\}$.

a) $X = \{\forall x \in \mathbb{N}, x \leq 13\}$ da $A(x)$: « $12:x$ », $B(x)$: « x — juft son» predikatlari berilgan bo'lsa, $A(x) \Rightarrow B(x)$ ning rostlik to'plamini topaylik.

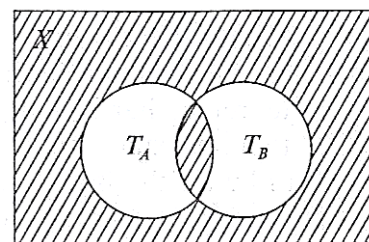
Yechish. $T_A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $T'_A = \{5; 7; 8; 9; 10; 11; 13\}$, $T_B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ bo'lsa, $T = T'_A \cup T_B = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$ bo'ladi.

Predikatlar ekvivalensiyasi. Aytaylik, X to'plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarining har ikkalasi yo'lg'on bo'lganda hamda har ikkalasi rost bo'lganda rost bo'ladigan, qolgan hollarda yo'lg'on bo'ladigan mulohaza predikatlar ekvivalensiyasi deyiladi.

predikatlar ekvivalensiyasi $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ko'rinishda belgilanadi va « $A(x)$ bilan $B(x)$ teng kuchli» deb o'qiladi. Agar ikkita predikatteng kuchli, ya'ni ekvivalent bo'lsa, ularning har biri ikkinchisi uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ning rostlik to'plamini T desak, u $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarining har ikkalasi bir vaqtda rost va har ikkalasi bir vaqtda yolg'on bo'ladigan mulohazalarning rostlik qiymatlari to'plamidan iborat bo'ladi. Demak, $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarining har ikkalasi rost bo'lgan holdagi rostlik to'plami $T_A \cap T_B$ dan, har ikkalasi yolg'on bo'lgan holdagi rostlik to'plami $T'_A \cap T'_B$ dan iborat bo'ladi. Demak, $T = (T_A \cap T_B) \cup (T'_A \cap T'_B)$. Buni Eyer — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (I.23-rasm).



I.23-rasm.

Masalan, a) $X = \{\forall x \in \mathbb{N}, x \leq 16\}$ to'plamda $A(x)$: « x son 3 ga karrali son», $B(x)$: « x soni 12 ning bo'luvchisi» predikatlari berilgan bo'lsa, $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ning rostlik to'plamini topaylik.

Yechish. $T_A = \{3; 6; 9; 12; 15\}$, $T_B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

$T = (T_A \cap T_B) \cup (T'_A \cap T'_B) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 15\} \cap \{3; 6; 12\} \cup \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14\} \cap \{5; 7; 8; 9; 10; 11\} = \{3; 6; 12\} \cup \{5; 7; 8; 10; 11\} = \{3; 5; 6; 7; 8; 10; 11\}$.

Fikr (mulohaza), predikatva ular ustidagi amallar tushunchalari ko'p tasdiqlarning mantiqiy tuzilishini aniqlashga yordam beradi.

Nazorat uchun savollar

1. Predikatlar bilan mulaxozalar orasida qanday farq bor.

2. Predikatlar inkorining ta'rifi va uning rostlik to'plamini ko'rsating.
3. Predikatlar konyunksiyasi uning xossalari va rostlik to'plami ko'rsating.
4. Predikatlar disyunksiyasi uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.
5. Predikatlar im'likatsiyasi uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.
6. Predikatlar ekvivalensiyasi uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.