8-ma'ruza:Mulohazalar va ularning berilish usullari

Ma'ruza mashg'ulotining rejasi:

1. **Mantiq tili**
2. **Formal mulohazalar mantig'i**
3. Mulohazalar haqida umumiy tushuncha.
4. Sodda va murakkab mulohazalar haqida tushuncha.
5. Mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallar.

Ma'ruza matni.

1.Mantiq tili

Rost termini (tushunchasi) mantiqning eng sodda (asosiy) tushunchalaridan biridir; ya`ni unga undan soddaroq tushunchalar orqali ta`rif berolmaymiz. Matematik mulohazalarda foydalaniladigan mantiq, rost tushunchasiga qo'shimcha yana uchta sodda (asosiy) tushunchalar bilan ish ko'radi. Bular "emas", "va" va "hammasi uchun".

Biz "Yolg'on"ni "rost emas" kabi aniqlaymiz, *propozitsional o'zgaruvchini* rost yoki yolg'on qiymatlardan faqat birini qabul qiluvchi, lekin ikkalasini bir vaqtda emas, ob`ekt sifatida ta`riflaymiz. Aksincha, "rost" propozitsional konstantabo'ladi, chunki o'zgaruvchidan farqli uning qiymati o'zgarmaydi. Boshqa propozitsional konstanta"yolg'on".

Bu bobda propozitsional konstantalarni belgilash uchun p, q, r, s vahokazolardan foydalanamiz. Umuman agar p propozitsional konstanta bo'lsa, $\neg p$ ni shunday propozitsional konstanta sifatida ta`riflaymizki, u faqat p yolg'on bo'lgandagina rost qiymat qabul qiladi. Agar biz p ni ta`kidlasak, p rost qiymat qabul qiladi, deb aytgan bo'lamiz. Agar biz "p va q" ni ta`kidlasak, p va q rost qiymat qabul qiladi, deb aytgan bo'lamiz. Biz buni $p\wedge q$ ko'rinishida yozamiz. 4 ta termin *"rost", "yolg'on", "emas"* va *"va"* mantiqda huddi muloqot tilidagi kabi ishlatiladi.

Boshqa mantiqiy terminlar*"va*" va *"emas"* terminlari orqali ta`riflanishi mumkin. "p va q" ni "$p\vee q$" ko'rinishida yozamiz va yoki p yoki q rost bo'lganda rost, boshqa hollarda yolg'on deb ta`riflaymiz. Buni "emas" va "va" orqali quyidagicha ta`riflashimiz mumkin $\neg(\neg p \wedge \neg q \vee)$. $\vee$ ni inklyuziv (kiritilgan) deb ataymiz, chunki so'zlashuv tilida $\vee$ inklyuziv yoki eksklyuziv (chiqarilgan) ma`no berishi mumkin. Eksklyuziv (ciqarilgan) ma`noni quyidagi suhbatda ko'rishimiz mumkin. Kichkina bola: "Men Bob va Jimning bolalar maydonchasiga kelishini hohlayman". Ona: "Bu juda ko'p. Sen Bobni yoki Jimni taklif qilishing mumkin". Matematikada yoki mantiqda biz bu gapdagi "Bob yoki Jim" ni $(p_b\vee p_j)\wedge(\neg(p_b\wedge p_j))$ kabi yozishimiz mumkin, bu yerda p_b "Sen Bobni taklif qilishing mumkin", p_j esa "Sen Jimni taklif qilishing mumkin" degan ma`noni beradi.

Aslida $(p_b\vee p_j)\wedge(\neg(p_b\wedge p_j))$ ifodasi tipik bo'lib, matematikani o'rganishda ko'p uchraydi. Boshida belgilar juda ko'pdek tuyuladi. Lekin yaxshilab qaralsa, 2 ta ifodaning kon`yunksiyasi bo'lib, ularning har birini yaxshi tushuna olsangiz, ifodaning hammasini ham tushunasiz. Birinchi qismini tushunish oson: $p_b$ yoki $p_j$. Ikkinchi qismida $p_b$ va $p_j$ kon`yunksiyasining inkori, ikkinchi qism p_b va p_j

emasligini bildiradi. Shundan so‘ng sizAha! Ifoda p_b yoki p_j ni, lekin ikkalasi bir vaqtda o‘rinla bo‘lmasligini tushunasiz. Siz so‘rashingiz mumkin, nima uchun yozuvchi shunchaki so‘zlar bilan aytib qo‘ya qolmayapti. Sababi shundaki, murakkabroq argumentlarda so‘zli ifodani tushunish matamatik ifodani tushunishdan ko‘ra qiyinroq bo‘lar edi.

Biz “agar p bo‘lsa, q bo‘ladi” deb aytamiz va uni “p→q” ko‘rinishda yozamiz, agar q rost yoki p yolg‘on bo‘lsa, p→q ning qiymati (¬p)∨q ning qiymati bilan bir xil bo‘ladi. Bu ta`rifning yaxshi tomoni shundaki, u implikatsiyaning muhim xususiyatini ko‘rsatuvchi va “modus ponens” deb ataluvchi qoidaga asos bo‘ladi. Modus ponensga asosan, agar p rost, p→q ham rost bo‘lsa, q rost bo‘lishi kerak. Ammo, → ning ba`zi noqylay tomonlari bor, qaysiki kundalik so‘zlashuv va fikrlarda mantiqiy chegara tushunchasidan mantiqiy implikatsiya (ko‘pincha material implikatsiya deb ataladi) ni uzoqlashtiradi. Masalan agar q rost bo‘lsa, p→q ham rost bo‘ladi, p ning qandayligidan qat`iy nazar. Shunday, masalan, “oqqushlar oq” → ”sigareta rakni keltirib chiqaradi” bu rost implikatsiya, albatta sigareta rakni oqqushlar oq bo‘lgani uchun keltirib chiqarmaydi, va sigaretalar agar mo‘jiza bo‘lib, oqqushlar siyohrang bo‘lib qolsa ham, rakni keltirib chiqaraveradi. Xuddi shunday, “Gyotening bo‘yi ikki fut edi” jumla “2+3=5” va “2+3=23” ni asoslaydi.

Biz ko‘pincha material implikatsiya p→q ni “agar p bo‘lsa, q bo‘ladi” deb tarjima qilamiz, material implikatsiyaning formal ta`rifi yana kundalik to‘qnashiladigan ma`noga bo‘ysinadi. Masalan ona bolalariga: ”Agar siz hamma sabzavotlarni yeb qo‘ysangiz, tuhlikdan so‘ng chiqishga va o‘ynashga ruxsat beraman” deb aytsa va kichkina Joy hamma sabzavotlarni yemasa ham u onasi aytgan material implikatsiyani buzmagan holda chiqishi va o‘ynashi mumkin. Aslida ona aytmoqchi: ”Sabzavot yesangizgina sizga chiqish va o‘ynashga rusat beriladi”. Kundalik so‘zlashuvda faqat so‘zini qo‘shtirnoq ichiga olishning hech qanday tushunmovchilik yo‘q, boshqacha aytilsa, gapda ma`no yo‘qolar edi.

Lekin biz “q agar faqat p bo‘lsa” ni (¬p)→(¬q) (agar p yolg‘on bo‘lsa, q ham yolg‘on bo‘ladi) kabi yozsak, formal mantiqda ma`nosizlik bo‘lmaydi; Shunga qaramay, agar siz ta`rifni tekshirib ko‘rsangiz, bu ifoda q→p kabi ma`no anglatishini ko‘rasiz. Shunday qilib, ona: “Agar p bo‘lsa, q bo‘ladi”, bu yerda p “siz sabzavot yeysiz” va q “chiqishingiz va o‘ynashingiz mumkin” degan ma`nolarni bildiradi, aslida matematik mantiq nuqtai nazaridan bu “agar q bo‘lsa, p bo‘ladi” ni bildiradi.

Biz “agar” va “faqat shu holda” iboralarini “p faqat va faqat q bo‘lganda” iborasiga almashtirishimiz mumkin, bu p va q ning bir xil rost yoki yolg‘on qiymat qabul qilishini, yoki ularning ekvivalentligini bildiradi (p→q)^(q→p).Biz buni p↔q yoki p≡q qisqa yozuvni qollashimiz mumkin.

2. Formal mulohazalar mantig‘i

Faraz qilaylik, bizda p,q,r,s va hokazo sodda (atomik) o‘zgaruvchi mulohazalar to‘plami bo‘lsin. Biz foydalanadigan mantiqiy bog‘lovchilar va o‘zgarmas mulohazalarni quyidagicha ta`riflaymiz:

$p \wedge q$	p va q
$p \vee q$	p yoki q
$\neg p$	p emas
$p \rightarrow q$	p bolsa, q bo‘ladi
$p \leftrightarrow q$	p faqat va nfaqat q bo‘lsa, bo‘ladi
$\top$	yolg‘on
$\perp$	rost

Bog‘lanish natijasida hosil bo‘lgan natijalarni o‘zgaruvchi mulohazalar va doimiy constant mulohazalar deb ataymiz. Har bir konkatenal o‘zgaruvchi mulohaza, mantiqiy bog‘lanish, constant mulohazalar va qavslarning chekli uzunligini qator deb ataymiz. Masalan:

$pp\vee)\leftrightarrow((\perp rs\rightarrow)$

qator hisoblanadi (lekin biror ma`no anglatmaydi).

Endi to‘g‘ri shakllantirilgan mulohazalar to‘plami PS ni

Biz hozir to‘g‘ri shakllantirilgan mulohazalar to‘plami PSni mulohazali o‘zgaruvchilar, mantiqiy bog‘lanishlar va o‘zgarmas miqdorli mulohazalar tizimining eng kichkina to‘plami deb shunday aniqlaymizki

- p, q, va boshqa o‘zgaruvchi mulohazalar xuddi o‘garmas $\top$ va $\perp$ lar kabi yuqoridagi PS to‘plamga tegishli.
- Agar s va t PS to‘plamda bo‘lsa, $(s\wedge t)$, $(s\vee t)$, $(\neg s)$, $(s\rightarrow t)$ va $(s\leftrightarrow t)$ ham PSga tegishli bo‘ladi.

Aytaylik, masalan,

$$((((p\rightarrow q)) \wedge p))\rightarrow q) \qquad (2.1)$$

mulohaza hisoblanadi. Bu jumla quyidagicha tuzilgan. Birinchidan, $(s\rightarrow t)$ da s va t ni p va q bilan almashtirib, $(p\rightarrow q)$ ga ega bo‘lamiz. Ikkinchidan, bu ifodani va q ni $(s\wedge t)$ dagi s va t bilan almashtirib, $((p\rightarrow q) \wedge p)$ ga ega bo‘lamiz. Bu ifodani $s\rightarrow t$ dagi s ning, q ni t ning o‘rniga qo‘yib, (2.1) ga ega bo‘lamiz.

Afsuski, (2.1) juda ko‘p deyarli o‘qilmaydigan kichik qavslar mavjud. Biz keraksiz qavslardan qutulishga imkon beradigan bir necha qoida kiritmoqchimiz. Birinchidan biz har doim tashqi qavslarni olib tashlashimiz mumkin, chunki, ((s)) yozuvi s bilan bir xil. Bu qiodani (2.1)da ikki marta qo‘llab, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$((p\rightarrow q)) \wedge p)\rightarrow q$$

Bu endi ancha o‘qishga oson. U aytadiki, “Agar p bo‘lsa, q bo‘ladi, agar p rost bo‘lsa, q ham rost”. Yuqorida ko‘rganimizdek, bu buyuk Modus – ponens.

Yana shuni ta`kidlaymizki, $\rightarrow$ va $\leftrightarrow$ o‘z argumentlarini $\vee$ va $\wedge$ga nisbatan qattiqroq bog‘laydi. Shunin g uchun (2.1) ni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$(p\rightarrow q \wedge p)\rightarrow q$$

Bu bizni biroz chalg‘itishi mumkin, qavslarsiz qaysi mantiqiy amal kuchliroqligini o‘ylashga majbur bo‘lib qolamiz.

Yana o‘ylaymizki, ¬ amali → ga nisbatan qattiqroq bog‘laydi, masalan, ¬ p →q aslida ¬(p →q) emas, (¬ p) →q hisoblanadi.[1]

3. Mulohazalar haqida umumiy tushuncha. Malumki, o‘zbek tilidagi ga’lar to‘plami 3 ta sinfga ajratiladi.

D — «Darak ga’lar» to‘plami.

C — «So‘roq ga’lar» to‘plami.

X — «His-hayajon ga’lar» to‘plami.

Haqiqatan ham, $D \cup C \cup X$ — ga’lar to‘plami va $D \cap C \cap X = \emptyset$ bo‘ladi.

O‘z navbatida «darak ga’lar» to‘plamini ham 3 ta to‘plamga ajratish mumkin.

Rost yoki yolg‘onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo‘lgan darak gaplar. Masalan:

Toshkent shahri O‘zbekiston Respublikasining poytaxti — rost;

London shahri Germaniyaning ‘oytaxti — yolg‘on;

2— tub son — rost;

$5 > 6$— yolg‘on;

«3 soni 15 sonining bo‘luvchisi» — rost.

Tarkibida o‘zgaruvchi ishtirok etgan darak gaplar.

Masalan:

X shahar O‘zbekiston Respublikasida joylashgan;

y —6 dan kichik tub son;

x — 5 dan kichik natural son;

O‘ — o‘zbek tilidagi unli tovush.

Rost yoki yolg‘onligini aniqlash mumkin bo‘lmagan darak gaplar.

Masalan:

Men bugun mehmonga bormoqchiman.

Bugun yomgir yog‘sa kerak.

Men tadbirkor bo‘lmoqchiman.

Matematika qiyin fan.

1-ta’rif. Rost yoki yolg‘onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gaplar ***mulohaza*** *deyiladi.*

So‘roq yoki his-hayajon ga’lar mulohaza bo‘la olmaydi. Noma’lum qatnashgan gaplar ham mulohazaga kirmaydi.

Mulohazalar bu matematik mantiq fanini boshlang‘ich tushunchasi hisoblanib, u quyidagicha quriladi:

1) ob’ektlar to‘plami beriladi:
2) ob’yektlarning ba’zi bir xossalari va ular orasidagi munosabatlar bayon qilinadi.

Mulohazalar nazariyasining boshlang‘ich ob’yektlari sodda mulohazalardan tashkil topadi va ular lotin alifbosining katta harflari $A, B, C, \ldots$lar bilan belgilanadi. Har bir sodda mulohaza rost yoki yolg‘on bo‘lishi mumkin..

---

[1] Hilbert. Advanced High-School Mathematics. 2011. 425s. 2-5 betlar mazmuni olingan

4. Sodda va murakkab mulohazalar haqida tushuncha.Mulohazalar *sod.a* va *murakkab* bo‘ladi.

Murakkab mulohazalarni sodda mulohazalarga ajratish mumkin.Masalan, a) «5 tub son va u 10 sonining bo‘luvchisi».

b) «2 eng kichik tub son va u juft son».

d) «Agar sonning raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linsa, u holda shu sonning o‘zi ham 3 ga bo‘linadi».

e) «3^2= 9 yoki 9 soni 3 ga bo‘linadi».

f) «Agar sonning oxirgi yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugasa, u faqat va faqat shundagina 5 ga bo‘linadi» — murakkab mulohazalardir.

Bir vaqtda rost yoki bir vaqtda yolg‘on bo‘lgan mulohazalar *ekvivalent mulohazalar* deyiladi. Ekvivalent mulohazalar $A = B$ ko‘rinishda yoziladi.

Matematik mantiq fanini mulohazani bayon qilish shakli emas, faqat rost yoki yolg‘onligi qiziqtiradi. Bundan buyon rost mulohazani «R» yoki «1», yolg‘on mulohazani «Y» yoki «0» bilan belgilaymiz.

Masalan,

$A-$ "$4>3$" - rost mulohaza

$B-$ "$7+5=12$" - rost mulohaza

$C-$ ”5-juft son" - yolg‘on mulohaza

$D-$ "7- toq son" - rost mulohaza.

Bu mulohazalarda A, B, D lar rost, C – yolg‘on. Matematikada har bir teorema mulohaza hisoblanadi. Teoremani isbotlash uchun oldin rostligi isbotlangan teoremalar, aksiomalar va boshlang‘ich tushunchalardan foydalaniladi. Bizga ma’lumki, sodda mulohazalardan bog‘lovchi so‘zlar yordamida murakkab mulohazalar hosil qilinadi. Bular «emas», «va» , «yoki», «… kelib chiqadi», «agar bo‘lsa, … u holda», «zarur va yetarli» kabi bog‘lovchi so‘zlar bo‘lib, bularni har bittasi bitta mantiqiy amalga mos keladi.

5. Mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallar. Mulohaza inkori.

2-ta’rif.A mulohaza ***inkori*** *deb, A rost bo‘lganda yolg‘on,yolg‘on bo‘lganda rost bo‘luvchi mulohazaga aytiladi.*

A mulohaza inkori $\overline{A}$ ko‘rinishda belgilanadi va *«A* emas», *«A* ekanligi yolg‘on» deb o‘qiladi. Masalan, *A: «$3^2=6$»* bo‘lsa, $\overline{A}$ *:* «$3^2 \neq 6$»;

A: «Hozir yoz fasli» bo‘lsa, uning inkori $\overline{A}$: «hozir yoz fasli emas» yoki «hozir yoz fasli ekanligi yolg‘on» kabi ifodalanadi.

Mulohaza inkorining rostlik jadvali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

Mulohaza inkorining xossasi: $A = \overline{\overline{A}}$ bo‘ladi:

A	$\overline{A}$
R	**yo**
yo	**R**

Masalan, *A:* «17 — tub son»;

$\overline{A}$ «17 — tub son emas»;

$\overline{\overline{A}}$ *:* «17 — tub son emasligi yolg‘on» yoki «17 — tub son».

Mulohazalar konyunksiyasi.

*3-ta'rif. Ikkita sodda A, B mulohazalardan tuzilgan «A va B» mulohazaga mulohazalar **konyunksiyasi** deyiladi.*

A	*B*	$A\wedge B$
R	R	R
R	Y	Y
Y	R	Y
Y	Y	Y

Mulohazalar konyunksiyasi uning tarkibiga kirgan mulohazalar rost bo‘lganda, rost bo‘ladi va «$A\wedge B$» yoki «$A\&B$» ko‘rinishda yoziladi hamda «*A* va *B*» kabi o‘qiladi. Konyunksiyaning rostlik jadvali 38-betdagi ko‘rinishda bo‘ladi:

Masalan, a) *A:* «5 — tub son» — (R); *B*: «5 >6» — (Y) bo‘lsin, u holda $A\wedge B$: «5 — tub son va u 6 dan katta» — yolg‘on mulohaza bo‘ladi.

b) *A:* «3 < 8» — (R), *B:* «8< 11» — (R), $A\wedge B$: «3 <8∧8< 11» yoki «3<8< 11», ya’ni tengsizliklar konyunksiyasini qo‘sh tengsizlik ko‘rinishida yozish mumkin va aksincha; ta’rifga ko‘ra «3 <8 < 11» — rost mulohaza.

Mulohazalar konyunksiyasining xossalari:

1°. $A\wedge B = B\wedge A$(kommutativlik);

2°. $(A\wedge B)\wedge C = A\wedge(B\wedge C) = A\wedge B\wedge C$*(assotsiativlik);*

3°. $A\wedge \overline{A}$ = Y ($A\wedge \overline{A}$ — aynan yolg‘on mulohaza).

Mulohazalar konyunksiyasi xossalarining to‘g‘riligini rostlik jadvallari tuzish va mos kataklardagi murakkab mulohazalar qiymatlarini taqqoslab tekshirish mumkin.[2]

Nazorat uchun savollar

1. “Darak gaplar”, “So‘roq gaplar” va “His-hayajon gaplarning barchasi mulohaza bo‘la oladi-mi?
2. Murakkab mulohaza sodda mulohaza bilan nimasi bilan farq qiladi?
3. Mulohazalar ustida bajariladigan qanday mantiqiy amallarni bilasiz?
4. Mulohaza **ta’rifi**ni ayting.
5. Inkor amalining **ta’rifi**ni ayting.
6. Konyunksiya amalining **ta’rifi**ni va xossasini ayting.

[2]Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики. Учебное пособие. Москва. «Академия». 2014 272 с. 17-26 betlarmazmuniolingan