# Kombinatorika elementlari.Kombinatorika masalalari. Yig'indi va ko'paytma qoidasi.

## Reja:

1 **Kombinatorika elementlari..Kombinatorika masalalari**
2.**Yig'indi qoidasi.**
3.**Ko'paytma qoidasi.**

Matematikaning kombinatorik tahlil, kombinatorik matematika, birlashmalar nazariyasi, qisqacha, kombinatorika deb ataluvchi bo'limida chekli yoki muayyan ma'noda cheklilik shartini qanoatlantiruvchi to'plamni (bu to'plamning elementlari qanday bo'lishining ahamiyati yo'q: harflar, sonlar, hodisalar, qandaydir predmetlar va boshqalar) qismlarga ajratish, ularni o'rinlash va o'zaro joylash ya'ni, kombinatsiyalar, kombinatorik tuzilmalar bilan bog'liq masalalar o'rganiladi. Hozirgi davrda kombinatorikaga oid ma'lumotlar inson faoliyatining turli sohalarida qo'llanilmoqda. Jumladan, matematika, kimyo, fizika, biologiya, lingvistika, axborot texnologiyalari va boshqa sohalar bilan ish ko'ruvchi mutaxassislar kombinatorikaning xilma-xil masalalariga duch keladilar.
To'plamlar nazariyasi iboralari bilan aytganda, kombinatorikada kortejlar va to'plamlar, ularning birlashmalari va kesishmalari hamda kortejlar va qism to'plamlarni turli usullar bilan tartiblash masalalari qaraladi. To'plam yoki kortej elementlarining berilgan xossaga ega konfiguratsiyasi bor yoki yo'qligini tekshirish, bor bo'lsa, ularni tuzish va sonini topish usullarini o'rganish hamda bu usullarni biror parametr bo'yicha takomillashtirish kombinatorikaning asosiy masalalari hisoblanadi.
Kombinatorikaning ba'zi elementlari eramizdan oldingi II asrda hindistonliklarga ma'lum edi. Ular hozirgi vaqtda gruppalashlar deb ataluvchi kombinatorik tushunchadan foydalanishgan. Eramizning XII asrida Bxaskara Acharya o'zining ilmiy tadqiqotlarida gruppalash va o'rin almashtirishlarni qo'llagan. Tarixiy ma'lumotlarga ko'ra, hindistonlik olimlar kombinatorika elementlaridan, jumladan, birlashmalardan foydalanib, she'riy asarlar tarkibiy tuzilishining mukammalligini tahlil qilishga uringanlar.
Umuman olganda, kombinatorikaning dastlabki rivoji qimor o'yinlarini tahlil qilish bilan bog'liq. Ba'zi atoqli matematiklar, masalan, fransuz matematigi B.Paskal (1623-1662), sveytasriyalik matematik Ya.Bernulli (1654-1705), L.Eyler (1707-1783), rus matematigi P.L.Chebishev (1821-1894) turli o'yinlarda (tanga tashlash, soqqa tashlash, qarta o'yinlari va shu kabilarda) ilmiy jihatdan asoslangan qarorlar qabul qilishda kombinatorikani qo'llashgan.
XVII asrda kombinatorika matematikaning alohida bir ilmiy yo'nalishi sifatida shakllana boshladi.
**Blez Paskal** o'zining "Arifmetik uchburchak haqida traktat" va "Sonli tartiblar haqida traktat" (1665 y.) nomli asarlarida hozirgi vaqtda binomial koeffitsientlar deb ataluvchi sonlar haqidagi ma'lumotlarni keltirgan. Fransuz matematigi

P.Ferma (1601-1665) esa figurali sonlar bilan birlashmalar nazariyasi orasida bog‘lanish borligini bilgan.
Figurali sonlar quyidagicha aniqlanadi. Birinchi tartibli figurali sonlar: 1, 2, 3, 4, 5, … (ya‘ni, natural sonlar); ikkinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si dastlabki ikkita natural sonlar yig‘indisi (3), 3-si dastlabki uchta natural sonlar yig‘indisi (6) va hokazo (1, 3, 6, 10, 15, …); uchinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si birinchi ikkita ikkinchi tartibli figurali sonlarlar yig‘indisi (4), 3-si birinchi uchta ikkinchi tartibli figurali sonlarlar yig‘indisi (10) va hokazo (1, 4, 10, 20, 35, …); va hokazo.
**1-misol.** Tekislikda radiuslari o‘zaro teng bo‘lgan aylanalar bir- biriga uringan holda yuqoridan 1 - qatorda bitta, 2 - qatorda ikkita, 3 - qatorda uchta va hokazo, joylashtirilgan bo‘lsin. Masalan, aylanalar bunday joylashuvining dastlabki to‘rt qatori 1 - shaklda tasvirlangan. Bu yerda qatorlardagi aylanalar sonlari ketma-ketligi birinchi tartibli figurali sonlarni tashkil qiladi. Bu tuzilmadan foydalanib, ikkinchi tartibli figurali sonlarni quyidagicha hosil qilish mumkin. Dastlab 1 - qatordagi aylanalar soni (1), keyin dastlabki ikkita qatordagi aylanalar soni (3), undan keyin dastlabki uchta qatordagi aylanalar soni (6), va hokazo.
Kombinatorika iborasi nemis matematigi G.Leybnis (1646- 1716) ning “Kombinatorik san‘at haqidagi mulohazalar” nomli asarida birinchi bor 1665-yilda keltirilgan. Bu asarda birlashmalar nazariyasi ilmiy jihatdan ilk bor asoslangan. O‘rinlashtirishlarni o‘rganish bilan birinchi bo‘lib Yakob Bernulli shug‘ullangan va bu haqdagi ma‘lumotlarni 1713 - yilda bosilib chiqqan “Ars conjectandi” (Bashorat qilish san‘ati) nomli kitobining ikkinchi qismida bayon qilgan. Hozirgi vaqtda kombinatorikada qo‘llanilayotgan belgilashlar XIX asrga kelib shakllandi.
**1. Kombinatorik masalalar va ularni yechishda qo‘llaniladigan qoidalar.**
Ikkita chekli to‘plamning Dekart ko‘paytmasidagi juftliklarni hisoblash qoidasi va uni to‘plamlar $n$ ta bo‘lgan hol uchun umumlashtirish kombinatorik masalalar deb ataluvchi masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi.
Kombinatorik masalalar – bu shunday masalalarki, ular chekli to‘plamlar elementlaridan turli-tuman kombinatsiya (birlashma) larning ba’zi qoidalari bo‘yicha tuziladi. Jumladan, “4, 5, 6 raqamlardan foydalanib, mumkin bo‘lgan barcha ikki xonali sonlarni shunday yozingki, sonning yozuvida ayni bir raqam takrorlanmasin” degan masalada 4, 5, 6 raqamlar bilan bajariladigan turli kombinatsiyalarni, bu kombinatsiyalarda raqamlar takrorlanmasligi shartida ko‘rib chiqish talab etiladi.
Hayotda ham kombinatorik masalalar ko‘plab uchraydi, bunda ob’yektlarning biror to‘plamidan uning qism to‘plamlarini tanlash, to‘plam elementlarini biron bir tartibda joylashtirish va hokazolar qaraladi. Masalan, fermer o‘z ishchilariga turli ishlarni bo‘lib berishi, katta jamoa ichidan delegatlar tanlash, shaxmat o‘yinida turli yurishlar seriyasidan eng ma’qulini tanlash kombinatorik masalalardan iboratdir.
Ko‘plab kombinatorik masalalarni yechishda qo‘shish va ko‘paytirish qoidalari qo‘l keladi:

**2.Yig'indi qoidasi.** Kombinatorikada to'plamlar birlashmasi elementlari sonini hisoblash masalasi *yig'indi qoidasi* deb ataladi.

- Agar $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ *(1)*
  bo'ladi.
  Ya'ni kesishmaydigan *A* va *B* to'plamlar birlashmasi elementlari soni shu to'plamlar elementlari sonlarining yig'indisiga teng.
- Agar $A \cap B \neq \emptyset$ bo'lsa, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ *(2)*
  bo'ladi. Ya'ni umumiy elementga ega ikki to'plam birlashmasi ele- mentlari soni to'plamlarning har biri elementlari sonlari yig'indisidan ularning umumiy elementlari sonining ayrilganiga teng. (2) formula (1) formulaning umumiy holi bo'lib, (1) formulada $n(A \cap B) = \emptyset$, ya'ni to'plamlarning umumiy elementi yo'q.

Yigindi qoidasi umumiy elementga ega bo'lgan uchta *A*, *B*, *C* to'plam uchun quyidagicha yoziladi: agar $A \cap B \cap C = \emptyset$ bo'lsa,
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ *(3)*
bo'ladi.
*(1) formula bilan yechiladigan kombinatorika masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi: agar x elementni k usul, y elementni m usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, «x yoki y» elementni k + m usul bilan tanlash mumkin.*

Masalan, savatda 8 ta olma va 10 ta nok bor bo'lsa, 1 ta mevani 8 + 10 = 18 usul bilan tanlash mumkin.
(2) formula bilan yechiladigan masala: 40 talabadan 35 tasi matematika imtihonini, 37 tasi rus tili imtihonini topshira oldi. 2-talaba ikkala fandan «2» oldi. Nechta qarzdor talaba bor?

Yechish. *A* — matematika fanidan «2» olgan, *B* - rus tili fanidan «2» olgan talabalar to'plami bo'lsin.
$n(A) = 40 - 35 = 5$ $n(A \cap B) = 2$.
$n(B) = 40 - 37 = 3$ $n(A \cup B) = 5 + 3 - 2 = 6$.
Javob: 6 ta qarzdor talaba bor.
(3) formula - yig'indi qoidasi bilan yechiladigan masalani ko`raylik.

1-masala. Sinfda 40 o`quvchi bor. Uning 26 tasi basketbol, 25 tasi — suzish, 27 tasi — gimnastika bilan shug`ullanadi, bir vaqtda suzish va gimnastika bilan — 15 ta, basketbol va gimnastika bilan — 16 ta, suzish va gimnastika bilan shug`ullanuvchilar — 18 ta. 1 o`quvchi darsdan ozod. Hamma sport turi bilan nechta o`quvchi shug`ullanadi? Nechta o`quvchi faqat 1 ta sport turi bilan shug`ullanadi?

Yechish. Maslada 3 ta to`plam qaralyapti: A — basketbol bilan shug`ullanuvchilar, B — suzish bilan shug`ullanuvchilar, C — gimnastika bilan shug`ullanuvchilar. Bu uch to`plam kesishadi.

Bu 3 to`plam kesishmasidagi elementlar sonini $x$ bilan belgilasak, quyidagi tenglamaga ega bo`lamiz:
$26 + 25 — (33 — x) + (18 — x) + 27 — (34 - x) + 1 = 40$.
Bu yerda $x = 10$. Demak, hamma sport turi bilan 10 ta o`quvchi, faqat 1 ta sport turi bilan 10 ta: basketbol bilan — 5 ta, suzish bilan — 2 ta, gimnastika bilan — 3 ta o`quvchi shug`ullanadi.

2-masala. 50 talabadan 20 tasi nemis tilini, 15 tasi inghliz tilini o`rganadi. Ikkala tilni biluvchi va faqat 1 ta tilni biluvchi talabalar soni nechta bo`lishi mumkin?

Yechish. Maslada 2 ta to`plam qaralyapti: $A$ —barcha talabalar to`plami, $B$ — nemis tilini o`rganadigan, $C$ — inghliz tilini o`rganadigan talabalar to`plami. Masala sharti bo`yicha $n(A) = 50$, $n(B) =20$, $n(C) = 15$.
A, B va To`plamlar orasidagi munosabatlarni Eyler-Venn diagrammalarida quyidagicha tasvirlash mumkin. Ikki tilni biluvchi talabalar soni B va C to`plamlar kesishmasi elementlari sonini topish bilan bog`liq. Faqat 1 ta tilni biluvchi talabalar soni ikki to`plam birlashmasi elementlari sonini topish bilan bog`liq.

**3.Ko'paytma qoidasi.** Chekli to'plamlarning dekart ko'paytmasi elementlari sonini topishga imkon beradigan qoida *ko'paytma qoidasi* deyiladi.
$A$ = {a1, *a2, …, an}* va B = {b1,b2, …, *b*m} to'plamlar elementlaridan nechta tartiblangan (ai, *bj.)* juftlik tuzish mumkinligini ko'raylik. Barcha juftliklarni tartib bilan quyidagicha joylashtiramiz:

*(a1; b1), (a1; b2), ... , (a1; bm), (a2; b1), (a2; b2), ... , (a2; bm), (an; b1), (an; b2), ... , (an; bm).*
Bu jadvalda $n$ ta qator va *m ta* ustun bo'lib, undagi barcha juftliklar soni $n{\cdot}m$ga teng. Bu yerda $n = n(A)$ va $m = n(B)$.
Ko'paytma qoidasi $n(A\times B) = n(A) \cdot n(B)$ ko'rinishda yoziladi.
**misol.** *A* shahardan *B* shaharga uchta yo'l, *B* dan *C* ga esa 2 ta yo'l olib boradi. *A* shahardan *C* shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

**Yechish.** *A* dan *B* ga 1-, 2- va 3-yo'llar olib boradi. *B* shahardan *C* shaharga *a* va *b* yo'llar olib boradi.
1-rasm.
U holda *A* dan *C* ga qo'yiladigan usullar bilan borish mumkin: (1,*a*), (1,*b*), (2,*a*), (2,*b*), (3,*a*), (3,*b*). Buni boshqacha usul bilan ham hal qilsa bo'ladi. *A* va *B* gacha boradigan yo'llarki, tanlash usuli 3 ta, *B* dan *C* gacha boradigan yo'llarni tanlash usuli esa 2 ta. Bunda ko'paytma qoidasiga ko'ra, yo'llarning tartiblangan juftliklarini $3*2=6$ usul bilan tanlash mumkinligi ko'rinib turibdi.

## Savol va topshiriqlar

1. Fizika ma’ruzasiga 20 ta, astronomiya ma’ruzasiga 30 ta talaba qatnashdi. Fizika yoki astronomiya ma’ruzalariga necha talaba qatnashishini aniqlang, agar: a) ma’ruzalar bir vaqtda o‘tkazilsa; b) turli vaqtlarda o‘tkazilsa va 10 ta talaba har 2 ma’ruzaga qatnashsa.
2. 100 kishidan 85 tasi ingliz, 45 tasi nemis tilini o‘rgandi. Ikkala tilni o‘rganuvchilar soni nechta?
3. 100 kishidan 35 tasi ingliz, 45 tasi nemis tilini o‘rgansa, ikkala tilni o‘rganuvchilar soni nechta bo‘lishi mumkin? Ikkita tildan birortasini ham o‘rganmaydiganlar sonichi?
usul bilan yuborish mumkin?