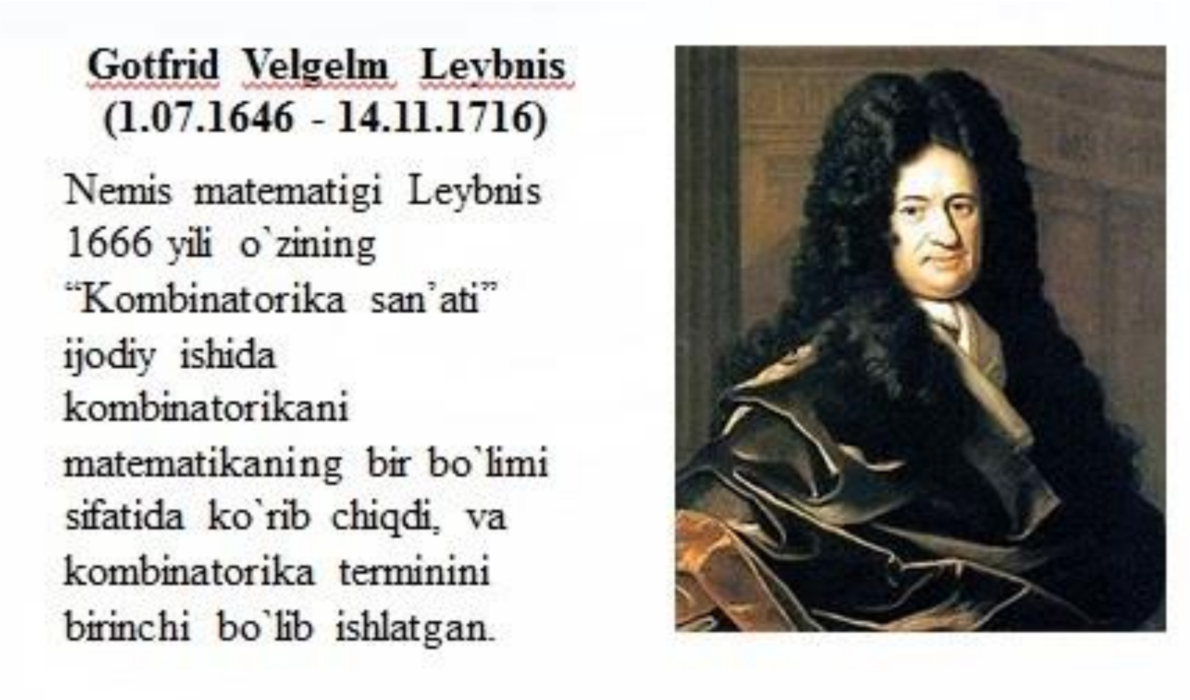
5-ma’ruza: Kombinatorika elementlari.

Ma’ruza mashg‘ulotining rejasi:

1. **Kombinatorika masalalari.**
2. **Yig‘indi qoidasi.**
3. **Ko‘paytma qoidasi.**

Ma’ruza matni



1.Kombinatorika masalasi. Elementlarning turli kombinatsiyalari va ularning sonini topish bilan bog‘liq masalalar *kombinatorika masalalari* deyiladi. Bunday masalalar matematika fanining tarmogi — kombinatorikada o‘rganiladi. Kombinatorika asosan, XVII—XIX asrlarda mustaqil fan sifatida yuzaga kelgan bo‘lib, uning rivojiga B.Paskal, P.Ferma, G.Leybnis, Y.Bernulli, L.Eyler kabi olimlar katta hissa qo‘shganlar.

Kombinatorikada, asosan, chekli to‘plamlar, ularning qism to‘plamlari, chekli to‘plam elementlaridan tuzilgan kortejlar va ularning sonini topish masalalari o‘rganilgani uchun uni to‘plamlar nazariyasining bir qismi sifatida qarash mumkin.

2.Yig‘indi qoidasi. Kombinatorikada to‘plamlar birlashmasi elementlari sonini hisoblash masalasi *yig‘indi qoidasi* deb ataladi.

1) Agar $A\cap B=\emptyset$ bo‘lsa,

$n(A\cup B) = n(A) + n(B)$ *(1)* bo‘ladi.

Ya’ni kesishmaydigan A va B to‘plamlar birlashmasi elementlari soni shu to‘plamlar elementlari sonlarining yig‘indisiga teng.

2) Agar $A\cap B\neq\emptyset$ bo‘lsa,

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) \quad (2)$$

bo‘ladi. Ya’ni umumiy elementga ega ikki to‘plam birlashmasi elementlari soni to‘plamlarning har biri elementlari sonlari yig‘indisidan ularning umumiy elementlari sonining ayrilganiga teng. (2) formula (1) formulaning umumiy holi bo‘lib, (1) formulada $n(A\cap B)=\varnothing$, ya’ni to‘plamlarning umumiy elementi yo‘q.

3) Yigindi qoidasi umumiy elementga ega bo‘lgan uchta $A,\ B,\ C$ to‘plam uchun quyidagicha yoziladi: agar $A\cap B\cap C = \varnothing$ bo‘lsa,

$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$ *(3)* bo‘ladi.

(1) formula bilan yechiladigan kombinatorika masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi: agar x elementni k usul, y elementni m usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, «x yoki y» elementni k + m usul bilan tanlash mumkin.

Masalan, savatda 8 ta olma va 10 ta nok bor bo‘lsa, 1 ta mevani 8 + 10 = 18 usul bilan tanlash mumkin.

(2) formula bilan yechiladigan masala: 40 talabadan 35 tasi matematika imtihonini, 37 tasi rus tili imtihonini topshira oldi. 2-talaba ikkala fandan «2» oldi. Nechta qarzdor talaba bor?

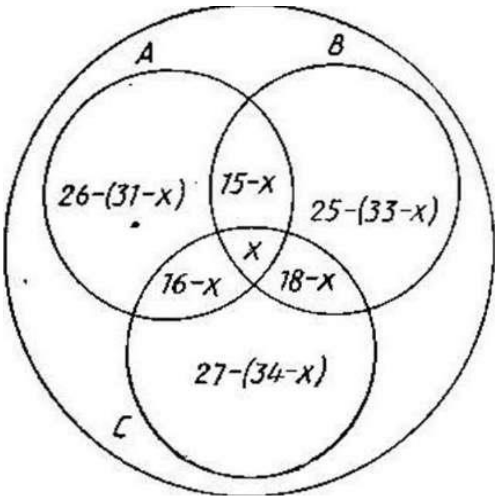
Yechish. A — matematika fanidan «2» olgan, B - rus tili fanidan «2» olgan talabalar to‘plami bo‘lsin.

$n(A) = 40 - 35 = 5$ $\quad n(A\cap B) = 2.$

$n(B)= 40 - 37 = 3$ $\quad n(A\cup B) = 5 + 3- 2 = 6.$

Javob: 6 ta qarzdor talaba bor.

(3) formula - yig‘indi qoidasi bilan yechiladigan masalani ko‘raylik.



1-masala. Sinfda 40 o‘quvchi bor. Uning 26 tasi basketbol, 25 tasi — suzish, 27 tasi — gimnastika bilan shug‘ullanadi, bir vaqtda suzish va gimnastika bilan — 15 ta, basketbol va gimnastika bilan — 16 ta, suzish va gimnastika bilan shug‘ullanuvchilar — 18 ta. 1 o‘quvchi darsdan ozod. Hamma sport turi bilan nechta o‘quvchi shug‘ullanadi? Nechta o‘quvchi faqat 1 ta sport turi bilan shug‘ullanadi?

Yechish. Maslada 3 ta to‘plam qaralyapti: A — basketbol bilan shug‘ullanuvchilar, B — suzish bilan shug‘ullanuvchilar, C — gimnastika bilan shug‘ullanuvchilar. Bu uch to‘plam kesishadi.

Bu 3 to‘plam kesishmasidagi elementlar sonini $x$bilan belgilasak, quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

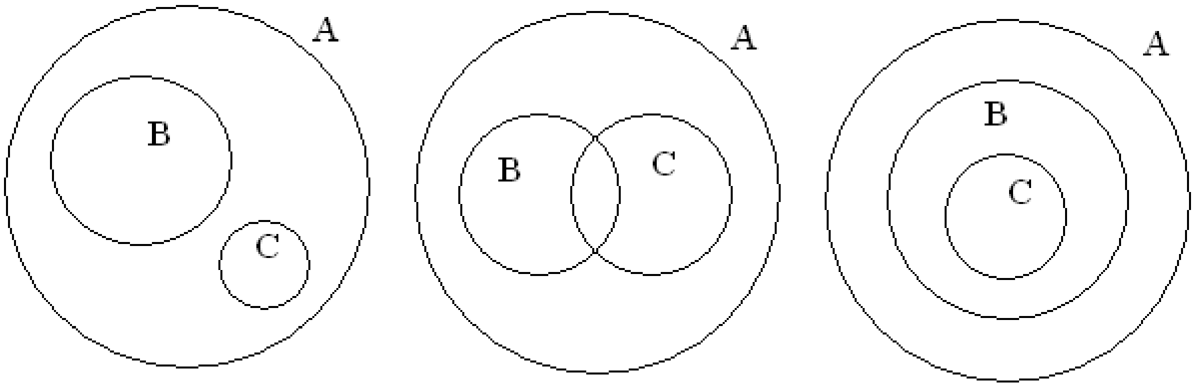
$26 + 25 — (33 — x) + (18 — x) + 27 — (34 - x) + 1 = 40.$

Buyerda$x = 10$. Demak, hamma sport turi bilan 10 ta o‘quvchi, faqat 1 ta sport turi bilan 10 ta: basketbol bilan — 5 ta, suzish bilan — 2 ta, gimnastika bilan — 3 ta o‘quvchi shug‘ullanadi.

2-masala. 50 talabadan 20 tasi nemis tilini, 15 tasi inghliz tilini o‘rganadi. Ikkala tilni biluvchi va faqat 1 ta tilni biluvchi talabalar soni nechta bo‘lishi mumkin?

Yechish. Maslada 2 ta to‘plam qaralyapti: A —barcha talabalar to‘plami, B — nemis tilini o‘rganadigan, C — inghliz tilini o‘rganadigan talabalar to‘plami. Masala sharti bo‘yicha $n(A) = 50$, $n(B) =20$, $n(C) = 15$.

A, B va To‘plamlar orasidagi munosabatlarni Eyler-Venn diagrammalarida quyidagicha tasvirlash mumkin. Ikki tilni biluvchi talabalar soni B va C to‘plamlar kesishmasi elementlari sonini topish bilan bog‘liq. Faqat 1 ta tilni biluvchi talabalar soni ikki to‘plam birlashmasi elementlari sonini topish bilan bog‘liq.



n (B ∩ C) = 0 n (B ∩ C) = 15

n (B ∪ C) = 35 n (B ∪ C) = 20

x—Ikki tilni biluvchi talabalar soni bo‘lsa, $0 \leq x \leq 15$ ($x \in N_0$). y— 1 ta tilni biluvchi talabalar soni bo‘lsa, $20 \leq y \leq 35$ ($y \in N_0$).

3.Ko‘paytma qoidasi. Chekli to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi elementlari sonini topishga imkon beradigan qoida *ko‘paytma qoidasi* deyiladi.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ to‘plamlar elementlaridan nechta tartiblangan (a_i, b_j) juftlik tuzish mumkinligini ko‘raylik. Barcha juftliklarni tartib bilan quyidagicha joylashtiramiz:

$$(a_1; b_1), (a_1; b_2), \ldots, (a_1; b_m),$$
$$(a_2; b_1), (a_2; b_2), \ldots, (a_2; b_m),$$
$$(a_n; b_1), (a_n; b_2), \ldots, (a_n; b_m).$$

Bu jadvalda n ta qator va m ta ustun bo‘lib, undagi barcha juftliklar soni $n \cdot m$ga teng. Bu yerda $n = n(A)$ va $m = n(B)$.

Ko‘paytma qoidasi $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ ko‘rinishda yoziladi.

Ko‘paytma qoidasiga oid kombinatorika masalasining umumiy ko‘rinishi: «Agar x elementni m usul, y elementni n usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, $(x;y)$ tartiblangan juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin».

Ikkitadan ortiq to‘plamlar uchun bu formula quyidagicha yoziladi:

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_n), (n>2).$$

Masalan, A shahardan B shaharga 3 yo‘l bilan, B shahardan C shaharga ikki yo‘l bilan borish mumkin bo‘lsa, A shahardan C shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

Yo‘lning 1-qismini 3 xil, 2-qismini 2 xil yo‘l bilan o‘tish mumkin bo‘lsa, umumiy yo‘lni $3 \cdot 2 = 6$ usul bilan o‘tish mumkin.

Umumlashgan ko‘paytma qoidasi: «Agar x elementni m usul bilan, y elementni, x ni tanlab bo‘lgandan so ‘ng, n usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, (x;y) juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin».

Masala. Nechta turli raqamlar bilan yozilgan ikki xonali sonlar bor?

Yechish. 1-raqamni 9 usul bilan (1, 2, …, 9), 2-raqamni ham 9 usul bilan (noldan boshlab o‘nliklar raqamidan boshqa raqamlar) tanlash mumkin. Hammasi bo‘lib $9 \cdot 9 = 81$ ta shunday son bor ekan.

Nazorat uchun savollar

1. Kombinatorika masalasi ta’rifini bering.
2. Kombinatorika fani rivojiga xissa qo‘shgan olimlarni ayting.
3. Yig‘indi qoidasining turli xollarini ko‘rsating.
4. Ko‘paytma qoidasini ayting va misollar keltiring.