

4-ma'ruza: Binar munosabatlar va ularning xossalari.

Ma'ruza matni:

Ma'ruza mashg'ulotining rejasi:

1. Ikkita to'plam elementlari orasidagi moslik.

2. Moslikning grafi va grafigi.

3. Moslik turlari.

1. Ikki to'plam elementlari orasidagi moslik.

Ikki to'plam elementlari orasidagi moslikni ko'rishdan oldin, ikki to'plam dekart ko'paytmasi va uning qism to'plamlarini misollar yordamida eslaylik. Aytaylik bizga $X = \{a, b, c\}$ va $Y = \{m, n\}$ to'plamlari berilgan bo'lsin. U holda

$$X \times Y = \{(a; m), (a; n), (b; m), (b; n), (c; m), (c; n)\}$$

ga ega bo'lamiz. Bu dekart ko'paytma 6 ta qism to'plamga ega.

1-Ta'rif $X \times Y$ dekart ko'paytmaning istalgan G_f qism to'plami X va Y to'plamlar orasidagi binar moslik deyiladi. Binar so'zi lotincha **bis** so'zidan olingan bo'lib, ikki to'plam elementlari orasida so'z borishini bildiradi.

Moslik lotin alifbosining f, d, t, s kabi harflari bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi: $f: A \rightarrow B$ yoki $A \xrightarrow{f} B$.

Bizga ma'lum bo'lgan funksiyalarning hammasi moslik tushunchasiga misol bo'la oladi.

X to'plam moslikning birinchi to'plami deyiladi. X to'plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to'plami moslikning aniqlanish sohasi deyiladi.

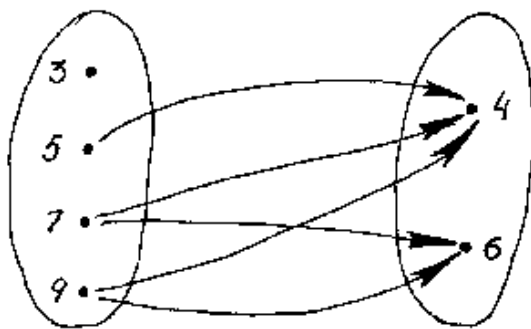
Y to'plam moslikning ikkinchi to'plami deyiladi. Y to'plamning moslikda qatnashgan elementlari to'plami moslikning qiymatlar to'plami deyiladi.

$G_f \subset X \times Y$ to'plam moslikning grafigi deyiladi. G_f grafik biror R moslikdagi (x, y) juftliklar to'plami ya'ni xRy , bu yerda $x \in X$, $y \in Y$

Ikki to'plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo'nalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar moslikning grafi deyiladi.

Cekli to'plamlar orasidagi moslik graflar yordamida ko'rgazmali tasvirlanadi.

Misollar: 1. $X = \{3, 5, 7, 9\}$ va $Y = \{4, 6\}$ to'plamlar orasidagi «katta» mosligining grafigini yasaymiz. Buning uchun berilgan to'plamlar elementlarini nuqtalar bilan belgilaymiz va X to'plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalardan Y to'plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalarga strelkalar o'tkazamiz (12-chizma)

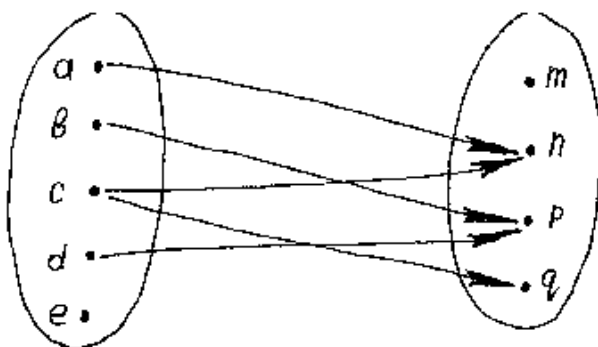


12-chizma

1. Natijada biz X va Y to'plamlar elementlari orasidagi «katta» mosligiga ega bo'lamiz.

2. $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{m, n, p, q\}$

$G_f = \{(a;n), (b;p), (c;n), (c;q), (d;p)\}$ grafini chizaylik (13-chizma)

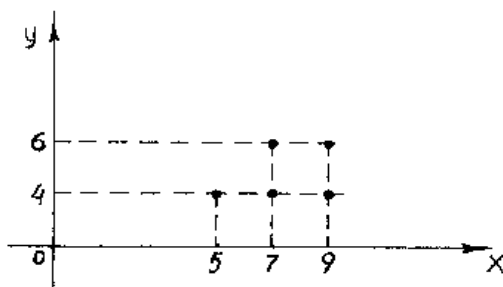


13-chizma

Bunda aniqlanish sohasi $\{a, b, c, d\}$, Qiymatlar to'plami $\{n, p, q\}$.

Sonli X va Y to'plamlar elementlari orasidagi moslik koordinata tekisligidagi grafik yordamida tasvirlanadi.

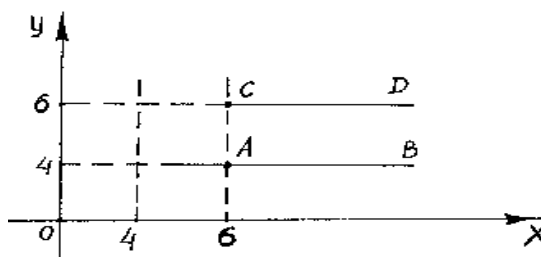
Buning uchun R moslikda bo'lgan barcha sonlar jufti koordinata tekisligida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Buning natijasida hosil bo'lgan figura R moslikning grafigi bo'ladi. Yuqoridagi misolni grafigini chizamiz. (14-chizma)



14-chizma

Moslikni bunday tasvirlash ularni berilgan moslikda cheksiz ko'p sonlar jufti bo'lganda ko'rgazmali tasvirlash imkonini beradi.

Masalan: $X = R$ va $Y = \{4, 6\}$ to'plamlar orasidagi «katta» mosligini qaraylik va grafigini yasaylik moslikni $[AB)$ va $[CD)$ nurlar ifodalaydi. (15-chizma)



15-chizma

Ta'rif. Agar ikkita X va Y to'plamlar orasidagi mosliklarning G_f grafigi

$X \times Y$ dekart ko'paytmasi bilan ustma-ust tushsa, bu moslik to'la moslik deyiladi. Agar moslik grafigi G_f , bo'sh bo'lsa ($G_f = \emptyset$) moslik bo'sh moslik deyiladi.

Ixtiyoriy ikkita X va Y to'plamlar orasida bo'sh va to'la mosliklar mavjud bo'lishi mumkin.

X va Y dekart ko'paytma to'plam ostilari ustida turli xil amallarni bajarish mumkin.

Masalan, X va Y to'plamlar orasida berilgan xRy va xKy mosliklar mosliklar birlashmasi deb, ularning grafiklari birlashmasidan iborat xSy moslikka aytiladiki, xSy moslik faqat va faqat xRy yoki xKy mavjud bo'lsa bo'ladi.

To'plamlar orasidagi moslik

A va B to'plamlari bo'lsin, A bilan B orasidagi moslik A dan B gacha bo'lgan oddiy amaldir; $f: A \rightarrow B$ yoki $A \rightarrow B$ yozuv orqali ifodalaymiz

Bir qancha misollar keltirsak (ba'zilar tanish)

- $f: R \rightarrow R$ $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in R$ orqali berilgan
- $f: R \rightarrow C$ $f(x) = (x-1) + ix^2$, $x \in R$ orqali berilgan
- $Z^+ \subseteq Z$ musbat tub son to'plami bo'lsin va $g(m) = \cos(2\pi/n)$, $n \in Z^+$ orqali $g: Z^2 \rightarrow R$ aniqlansin
- $h: R \times R \rightarrow R$ $h(x,y) = x-y$, $x,y \in R$ orqali berilgan
- $\gamma: R \times R \rightarrow R$ $\gamma(x,y) = x^2 + y^2$ orqali berilgan
- $q: Z \rightarrow Z$ $q(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)$, $n \in Z$ orqali berilgan
- $\mu: Z^+ \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ quyidagi orqali berilgan

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{agar } n \text{ farqli bosh sonlarning juft soni natijasi bo'lsa} \\ -1 & \text{agar } n \text{ farqli bosh sonlarning toq soni natijasi bo'lsa} \\ 0 & \text{agar } n \text{ farqli bosh sonning natijasi bo'lmasa} \end{cases}$$

Shu sababli, misol uchun $\mu(1) = 0$. Shuningdek, $\mu(6) = 1$, ikkita farqli bosh sonning natijasi $6 = 2 \cdot 3$ kabidir. Shunga o'xshash, $\mu(5) = \mu(30) = -1$ va $\mu(18) = 0$

- $h: R \times R \rightarrow C$ $h(x,y) = x + iy$, $x,y \in R$ orqali berilgan
- $\sigma: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ quyidagi orqali tasvirlangan

$$\sigma: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Agar $f: A \rightarrow B$ moslik bo'lsa, biz A ni f ning sohasi, B ni esa f ning teskari sohasi deb ataymiz. f ning ranggi esa $\{f(a) | a \in A\} \subseteq B$ qism to'plamdir.

Ba'zi ta'riflar. A va B to'plamlar va $f: A \rightarrow B$ bo'lsin. Aytamizki,

Agar $x, y \in A$, $x \neq y$ bo'lganda $f(x) \neq f(y)$ bo'lsa, f **birga-bir** (yoki **in'yektiv**) deyiladi.

Agar ixtiyoriy $z \in B$ uchun biror $x \in A$ element topilib, $f(x) = z$ bo'lsa, f **ustiga** (yoki **sur'yektiv**) deyiladi.

Agar f ham birga-bir, ham ustiga bo'lsa, f **bi'yektiv** deyiladi.

Keyingi ta'rif nihoyatda foydalidir. A va B to'plamlar va $f: A \rightarrow B$ moslik bo'lsin. $b \in B$ bo'lsin; $f^{-1}(b)$ bo'lib yozilgan, b usti f aksi

$$f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\} \subseteq A \text{ to'plamidir.}$$

Iltimos aslini teskari funksiya f^{-1} bilan aloqador biror narsa bilan adashtirmang, chunki u mavjud bo'lmasligi mumkin!

E'tiborga olingki, $b \in B$ bo'lsa, b larning asli bo'sh to'plam bo'lishi mumkin. Shunday bo'lsa ham, agar biz $f: A \rightarrow B$ ustiga ekanligini bilsak, unda B dagi har bir elementining asli bo'sh bo'lmaydi. Agar aslida, har bir $b \in B$ uchun b ning $f^{-1}(b)$ asli yagona elementdan tashkil topsa, unda f ning biyeksiya ekanligi kafolatlanadi.

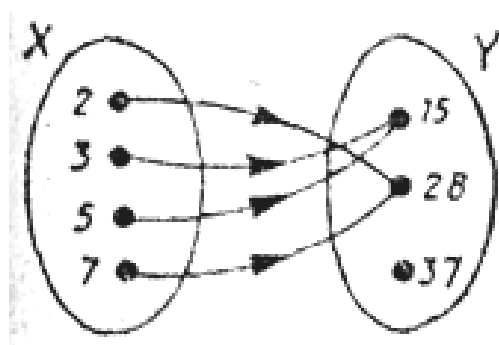
Nihoyat, $f: A \rightarrow A$ moslik o'rin almashtirish deyiladi, agar u biyeksiya bo'lsa. Bundan ko'rinib turibdiki, agar $|A|=n$ bo'lsa, A da $n!$ biyeksiyalar mavjud.

Mashqlar:

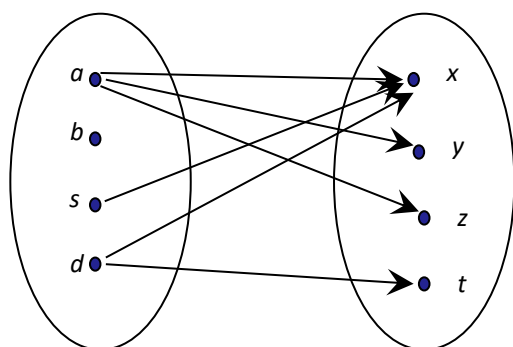
1. $f: B \rightarrow B$ kvadrat funksiya bo'lsin. Barcha $x \in R$ lar uchun $f(x) = ax^2 + bx + c$ bo'ladigan ixtiyoriy haqiqiy o'zgarmas $a, b, c \in R$ va $a \neq 0$ sonlar mavjud. f in'yektiv ham, sur'yektiv ham bo'lolmasligini isbotlaydi.

1. Munosabat turlari.

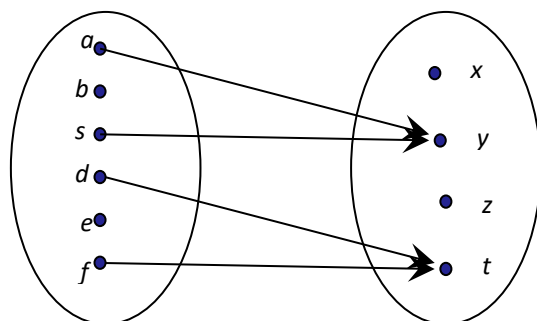
1-Ta'rif: Agar f moslikning aniqlanish sohasi birinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik hamma yerda aniqlangan deyiladi.



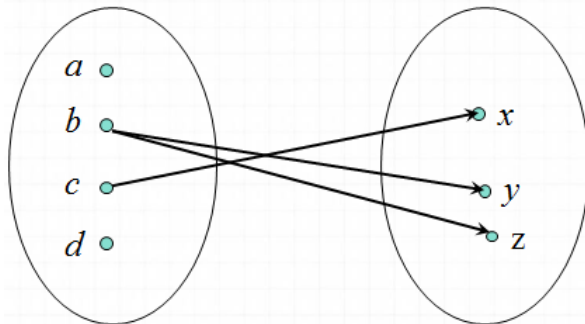
2-Ta'rif: Agar f -moslikning qiymatlar to'plami ikkinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik sur'yektiv deyiladi.



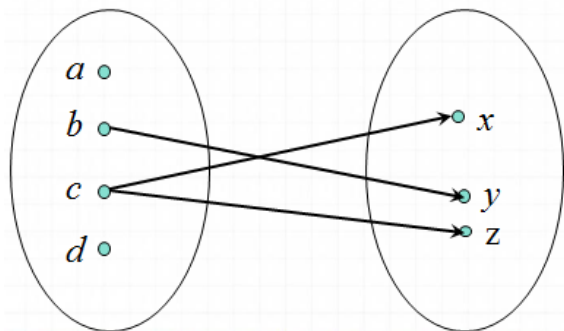
3-Ta'rif: Agar f moslikda birinchi to'plamning har bir elementiga ikkinchi to'plamning bittadan ortiq bo'lmagan elementi mos kelsa, f moslik funksional deyiladi.



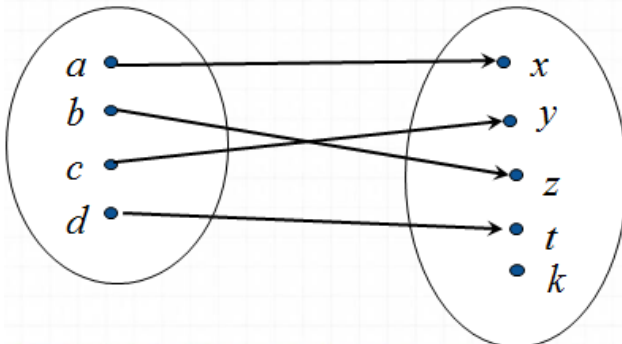
4-Ta'rif: Agar f moslikda ikkinchi to'planning har bir elementiga birinchi to'planning 1 tadan ortiq bo'lmagan elementi mos qo'yilgan bo'lsa, f moslik in'ektiv deyiladi.



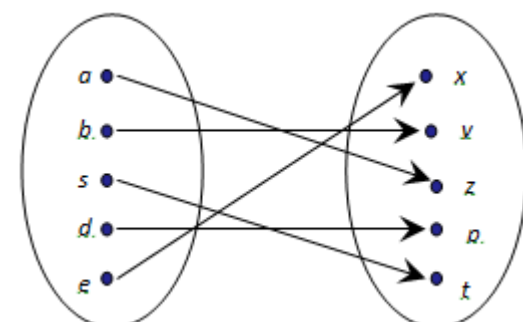
5-Ta'rif: Sur'ektiv va in'ektiv moslik bir so'z bilan biektiv deyiladi.



6-Ta'rif: Hamma yerda aniqlangan funksional moslik akslantirish deyiladi.



7-Ta'rif: X va Y to'plamlar orasidagi f moslik biektiv akslantirish bo'lsa, X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan deyiladi.



Moslik turlariga misollar keltiramiz.

Misol: Aytaylik X - kiyim iladigan garderobdagi paltolar to'plami, Y esa shu garderobdagi ilgaklar to'plami bo'lsin.

Agar har bir palto ilgakga ilinib turgan bo'lsa (polda yotmasdan) u holda X to'plam Y to'plamga akslantirish bo'ladi.

Agar bu akslantirishda har bir ilgakga bittadan ortiq palto ilinmagan bo'lsa (bo'sh ilgaklar ham bo'lishi mumkin) bu akslantirish in'ektiv bo'ladi.

Agar hamma ilgaklar band bo'lsa (bunda ayrim ilgaklarda bittadan ortiq paltolar ilingan ham bo'lishi mumkin) bu akslantirish sur'ektiv bo'ladi.

Agar har bir ilgakda bittadan palto ilingan bo'lsa (o'zaro bir qiymatli) bu akslantirish biektiv bo'ladi.

8-Ta'rif: X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, bu to'plamlar teng quvvatli deyiladi va qisqacha $X \sim Y$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan: Agar $X\{a,b,c,d,e\}$, $Y\{x,y,z,t,p\}$ bo'lsa, u holda $X \sim Y$ bo'ladi, chunki, X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin.

9-Ta'rif: Barcha natural sonlar to'plami N ga teng quvvatli to'plamlar sanoqli to'plam deyiladi.

Masalan:

$$X = \{a; b; c; d\};$$

$$Y = \{x; y; z; t\}; G_f = \{(a; x), (b; y);$$

$(c; z), (d; t)\}$ bo'lsa, f moslik X va Y to'plamlar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik bo'ladi.

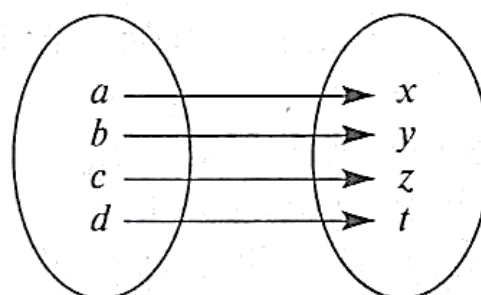
Chekli va cheksiz to'plamlar elementlari soni to'plam quvvati deb yuritiladi va $n(A)$, $n(B)$, $n(N)$ kabi yoziladi. Masalan, $A = \{a; b; c; d\}$ bo'lsa, $n(A) = 4$ bo'ladi. O'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish yordamida chekli va cheksiz to'plamlar elementlari sonini taqqoslash mumkin.

10-ta'rif. X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, bu to'plamlar **tengquvvatli** yoki **ekivalent** deyiladi va $X \sim Y$ ko'rinishda yoziladi. Bu holda $n(X) = n(Y)$ bo'ladi.

11-ta'rif. Barcha natural sonlar to'plami N ga teng quvvatli to'plamlar **sanoqli to'plam** deyiladi.

Agar istalgan cheksiz to'plamning har bir elementiga biror qoida yordamida bittadan natural sonni mos keltira olsak, bu to'plam elementlari natural sonlar yordamida nomerlab chiqilgan bo'ladi va bunday to'plam sanoqli to'plam hisoblanadi. Natural sonlar to'plamining istalgan cheksiz qism to'plami sanoqlidir.

Masalan, barcha juft sonlarni quyidagicha nomerlab chiqamiz:



I.13-rasm.

$$\begin{array}{ccccccc}
 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots
 \end{array}$$

Hatto barcha butun sonlar to‘plami ham sanoqli ekanini ko‘rsatish mumkin.

(III) $f(x,y)=x-y$ ni hosil qilish orqali $f:R^2 \rightarrow R$ funksiyasini aniqlang. $(x_1,y_1) \in R \times R$ $(x_2,y_2) \in R \times R$ $\Leftrightarrow f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$ ni asos qilish orqali R^2 dagi ekvivalentlik munosabatini aniqlang. E’tibor beringki, bu $x_1-y_1=x_2-y_2$ deyish bilan bir xil. Shunday ekan, ekvivalentlik sinflari f moslikning aslidan boshqa narsa emas. Yuqoridagi ko‘rsatilgan shartlar $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = 1$ ko‘rinishida ifodalansa, biz ekvivalentlik sinflarini tasavvur qila olamiz, bu ekvivalentlik sinflari R^2 Dekart tekisligidagi turlicha og‘gan to‘g‘ri chiziqlar to‘plamidan iborat.

Yakuniy ta’rif quyidagicha bo‘ladi. S to‘plam bo‘lsin va R S dagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsin. R dagi S faktor top‘lam S dagi ekvivalentlik sinflari bo‘ladi. Belgilanishi:

$$S/R = \{[a] \mid a \in S\}.$$

Biz bu bo‘limni nihoyatda muhim faktor to‘plam bilan xulosalaymiz. $n \in \mathbb{Z}^+$ bo‘lsin, R esa “ $\equiv (\text{mod } n)$ ” bo‘lsin. Z_n odatda mos keluvchi faktor to‘plam uchun yoziladi. Ya’ni,

$$Z_n = \{[m] \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}.$$
¹

Nazorat uchun savollar:

1. Munosabat turlarini ayting.
2. To‘plamni to‘plamga o‘zaro bir qiymatli akslantirish.
3. Teng quvvatli to‘plamlar.
4. Qanday to‘plamlar teng quvvatli deyiladi?

8-mavzu. To‘plamdagi munosabat

Ma’ruza mashg‘ulotining rejasi:

1. To‘plamdagi munosabat ta’rifi.
2. To‘plamdagi munosabatning grafi va grafigi.
3. To‘plamdagi munosabatning xossalari.

Ma’ruza matni

1. To‘plam elementlari orasidagi munosabat. Biz to‘plamlarni o‘rganganda ularni taqqoslab, ular kesishadi yoki teng, yoki biri ikkinchisini qismi deb to‘plamlar orasidagi munosabatni qaradik. Natural sonlar to‘plamini qaraganda

¹ Shuni muhimki, IB imtihoni mualliflari Z_n elementlarini yozganda qavsdan foydalanmaydilar; ular shunchaki $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ deb yozadilar. Mantiqan xato bo‘lsa ham, bu anglashilmovchiliklar keltirib chiqarmaydi. David Surovski Advanced High-School Mathematics. 2011. 425s. 203 - betmazmunidanolingan

sonlar orasidagi turli - tuman bog'lanishlarni ko'ramiz. Masalan, 7 soni 6 sonidan katta, 12 soni 9 sonidan 3ta ko'p, 3 soni 2 sonidan keyin keladi va hokazo.

Xuddi shunga o'xshash, geometriyada figuralarning tengligi va o'xshashligi, to'g'ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi kabi munosabatlar qaraladi.

Bulardan ko'rinadiki, matematikada asosan, ikki ob'ekt orasidagi munosabat qaraladi, bunga binar munosabatlar deyiladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan munosabatlar orasida umumiylik bormi, yo'qmi degan masalani qarajak, u yoki bu munosabatlarni qarashda biz berilgan to'plamlar sonlaridan tashkil topgan tartiblangan juftliklar bilan amallar bajarishni ko'ramiz.

Masalan: $X = \{4;5;6\}$ to'plamda 1 ta ko'p munosabatini qarajak, «5 soni 4 sonidan 1 ta ko'p», «6 soni 5 sonidan 1 ta ko'p». Shu to'plamda katta munosabatni qarajak « $5 > 4$ », « $6 > 4$ », « $6 > 5$ ». Shunga o'xshash kichik munosabatini qarajak «4 soni 5 sonidan 1 ta kam», «5 soni 6 sonidan 1 ta kam».²

Keltirilgan misoldagi «1 ta ko'p» munosabat uchun $\{(5;4), (6;5)\}$ to'plam, «katta» munosabati uchun $\{(5;4), (6;4), (6;5)\}$ to'plam, «kichik» munosabati uchun $\{(4;5), (5;6)\}$ to'plamlarga ega bo'lamiz. Bu to'plamlar esa elementlari $X = \{4;5;6\}$ to'plam elementlaridan hosil qilingan sonlar juftliklari to'plami bilan aniqlanadi. Boshqacha aytganda, bu to'plamlar $X = \{4;5;6\}$ to'plam Dekart ko'paytmasining elementlaridan tashkil topgan qism to'plamlardir, ya'ni

$$X \times X = \{(4;4), (4;5), (4;6), (5;4), (5;5), (5;6), (6;4), (6;5), (6;6)\} :$$

Bundan ko'rinadiki, ko'rib o'tilgan munosabatlar $X \times X$ Dekart ko'paytmaning qism to'plami bilan aniqlanar ekan.

1-Ta'rif. $X \times X$ to'plamning istalgan G qism to'plami binar munosabat deyiladi. Binar munosabatlar lotin alfavitining bosh harflari P, K, R, S... bilan belgilanadi.

*Boshqacha aytganda, X to'plam elementlari orasidagi **munosabat** deb $R = (X \times X, G_r)$ juftlikka aytiladi, bu yerda $G_r \subset X \times X$.*

Agar X to'plamda berilgan R munosabatda $a \in X$ elementga $b \in X$ element mos kelsa, « a element b element bilan R munosabatda» deyiladi va aRb deb yoziladi, bu yerda $(a; b) \in G_r$.

Xususiyl holda teng to'plamlar orasidagi moslik X to'plam elementlari orasidagi *binar munosabat* deyiladi. X odamlar to'plami bo'lsa, unda «do'st bo'lmoq», «bitta shaharda yashamoq», «qarindosh bo'lmoq» kabi munosabatlar bo'ladi. Sonlar orasida «teng», «katta», «kichik», «karrali», «katta emas», «bo'luvchisi» va h. k. munosabatlar, geometrik shakllar to'plamida «tengdoshlik», «parallellik», «perpendikularlik» va boshqa munosabatlar haqida gapirish mumkin.

Matematikada binar munosabatlar $a = b$, $a < b$, $a > b$, $a \neq b$, $a \parallel b$, $a \perp b$ kabi belgilar orqali berilgan.

Z butun sonlar to'plamida $aRb \Leftrightarrow m \mid (a - b)$ munosabatni qaraylik. Ma'lumki, a va b butun sonlarini m natural soniga bo'lishda bir xil r ($0 < r \leq m$) qoldiq

²Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики. Учебное пособие. Москва. «Академия». 2014 272 с. 17-20 betlar mazmuni olingan

hosil bo'lsa, a va b sonlari m modul bo'yicha taqqoslanadigan (teng qoldikli) sonlar deyiladi va $a \equiv b \pmod{m}$ ko'rinishda belgilanadi. a soni b soniga m modul bo'yicha taqqoslanishini ifodalovchi $a \equiv b \pmod{m}$ bog'lanish taqqoslama deb o'qiladi.

Masalan: $27 = 5 \times 5 + 2$, $12 = 5 \times 2 + 2$ bo'lgani uchun $27 \equiv 12 \pmod{5}$.

Yoki, agar $m = 7$ bo'lsa, $1 \equiv 15 \pmod{7}$ bo'ladi.

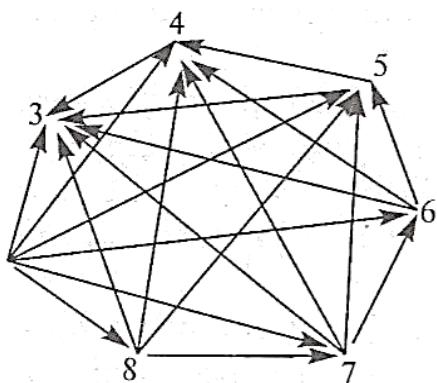
Shu narsa ma'lumki, $a \equiv b \pmod{m}$ taqqoslama $a - b$ ayirma m ga qoldiqsiz bo'lingandagina o'rinli bo'ladi.

E'tibor beringki, $m = 7$ bo'lsa, 7 modul bo'yicha taqqoslanadigan butun sonlarning umumiy ko'rinishi $-1 + 7k$ shaklda bo'ladi, bu yerda $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ³

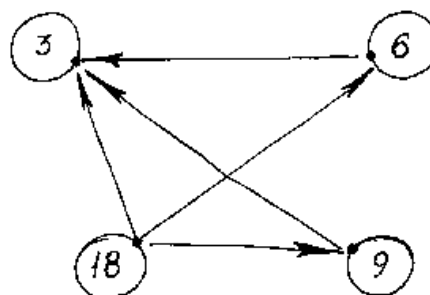
2. To'plamdagi munosabatning grafi va grafigi.

Munosabatlarni graflar yordamida ko'rgazmali tasvirlash mumkin. Masalan:

$X = \{3; 6; 9; 18\}$ to'plam elementlari uchun «karrali» munosabatini ko'ramiz va uning grafini chizamiz (16-chizma). 18 soni 3 ga karrali, 18 soni 6 ga karrali, 18 soni 9 ga karrali va hokazo. X to'plamdagi ixtiyoriy son o'z-o'ziga karrali bo'lgani uchun oxiri ustma-ust tushadigan strelkalar mavjud. Bunday strelkalar sirtmoqlar deyiladi.



I.14-rasm.



Munosabat grafi chekli to'plamlar uchun quyidagicha chiziladi: to'plam elementlari nuqtalar bilan belgilanadi, mos elementlar strelkalar bilan tutashtiriladi. Masalan, $X = \{3;$

$4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ to'plam elementlari orasida $P: \langle x > y \rangle$ munosabat berilgan.

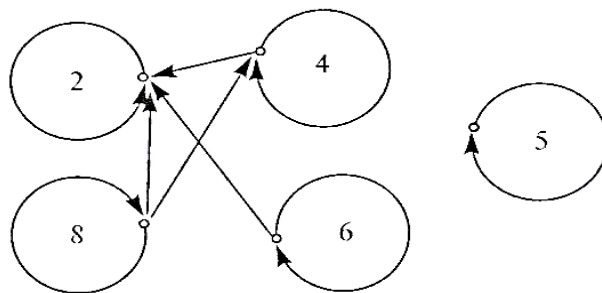
U quyidagi juftliklar to'plami orqali ifoda qilinadi:

$$G = \{(4; 3), (5; 3), (5; 4), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (7; 3), (7; 4), (7; 5), (7; 6), (8; 3), (8; 4), (8; 5), (8; 6), (8; 7), (9; 3), (9; 4), (9; 5), (9; 6), (9; 7)\}.$$

Uning grafi I.14-rasmdagi ko'rinishda bo'ladi. Yoki $Y = \{2; 4; 5; 6; 8\}$ to'plamda $Q: \langle x \text{ soni } y \text{ soniga karrali} \rangle$

($\langle x; y \rangle$) munosabati berilgan bo'lsin. Munosabat grafida birinchisi ikkinchisiga karrali sonlar juftligidan iborat bo'ladi. $G = \{(2; 2), (4; 2), (4; 4), (5; 5), (6; 2), (6; 6), (8; 2), (8; 4), (8; 8)\}$ munosabat grafida (2; 2) juftlikni

³ David Surovski Advanced High-School Mathematics. 2011. 425s. 200 - betlarmazmuniolingan



I.15-rasm.

ko'rsatuvchi strelkaning boshi ham, oxiri ham bitta nuqtada bo'ladi, bunday strelkani «halqa» deb ataymiz. Munosabat grafi I.15-rasmdagi kabi chiziladi:

3. Munosabat xossalari.

1-ta'rif. Agar X to'plamning har bir elementi o'z-o'zi bilan R munosabatda bo'lsa (ya'ni, xRx bajarilsa), u holda R munosabat X to'plamda **refleksiv** deyiladi.

Masalan, « $x = y$ », « $a || b$ », « $x : y$ » munosabatlar refleksivdir.

Refleksiv munosabat grafida har bir element atrofida halqa bo'ladi (2.5-banddagi 2-misol).

2-ta'rif. Agar X to'plamning birorta ham elementi uchun xRx bajarilmasa, u holda R munosabat X to'plamda **antirefleksiv** deyiladi.

Masalan, « $a < b$ », « $a > b$ », « $a \perp b$ » munosabatlar antirefleksivdir.

Antirefleksiv munosabat grafida birorta ham halqa bo'lmaydi (2.5-banddagi 1-misol).

3-ta'rif. Agar X to'plamda R munosabat berilgan bo'lib, xRy va yRx bir vaqtda bajarilsa, R **simmetrik munosabat** deyiladi.

Masalan, « $a || b$ », « $a \perp b$ », « $a = b$ » munosabatlari simmetrikdir. Simmetrik munosabat grafida har bir strelkaga parallel qaytuvchi strelka bo'ladi.

4-ta'rif. Agar X to'plamda berilgan R munosabatda xRy va yRx shartlardan faqat bittasi o'rinli bo'lsa, R munosabat **asimmetrik** munosabat deyiladi.

Masalan, « $a > b$ », « $a < b$ » munosabatlari asimmetrikdir.

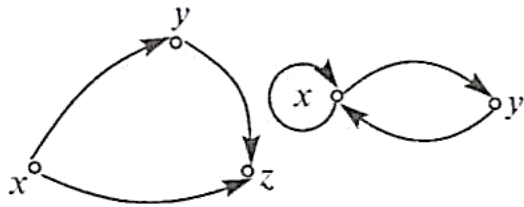
Asimmetrik munosabat grafida birorta ham halqa va qaytuvchi strelkalar bo'lmaydi.

5-ta'rif. Agar X to'plamda R munosabat uchun xRy va yRx shartlar faqat $x = y$ bo'lgan holda bajarilsa, u holda R **antisimmetrik munosabat** deyiladi.

Masalan, « $a > b$ », « $a \leq b$ », « $a : b$ », « a soni b sonining bo'luvchisi» kabi munosabatlar antisimmetrik munosabat bo'ladi. Antisimmetrik munosabat grafida halqalar bo'ladi, lekin qaytuvchi strelkalar bo'lmaydi.

6-ta'rif. Agar X to'plamda berilgan R munosabat uchun xRy va yRz ekanligidan xRz ekanligi kelib chiqsa, u holda R munosabat **tranzitiv** deyiladi.

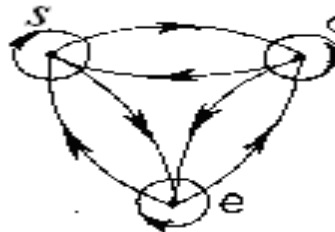
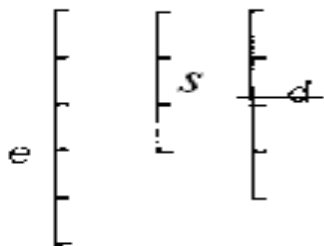
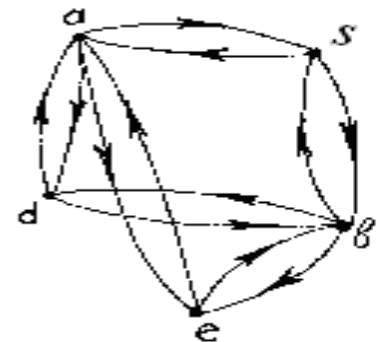
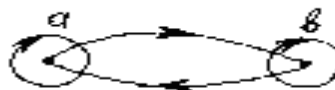
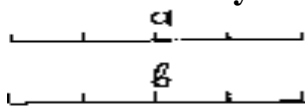
Masalan, « $a > b$ », « $a = b$ », « $a || b$ », « $a : b$ » kabi munosabatlar tranzitivdir.



Tranzitiv munosabat grafida x dan y ga, y dan z ga bo- ruvchi strelkalar bo'lsa, albatta x dan zga boruvchi strelka ham bo'lishi kerak⁴ (I.16-rasm).

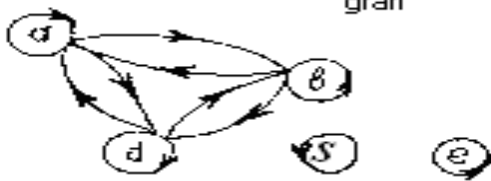
I.16-rasm.

Munosabatlarni xossalarini ajratib ko'rsatish uchun matematikada yuqorida aytib o'tilgan munosabatlarni kesmalar to'plamida graflar yordamida tasvirlaymiz. kesmalar berilgan bo'lsin (17- a, b, v, g chizmalar).

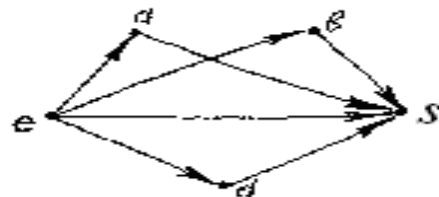


a) parallel munosabatining grafi

b) perpendikulyarlik munosabatining grafi



v) tenglik munosabatining grafi



g) "uzunroq" munosabatining grafi

Munosabatlar va ekvivalent munosabatlar

S to'plam bo'lsin. S to'plamdagi R munosabat deb, $S \times S$ ning to'plam ostisiga aytiladi. Ortiq ham, kam ham emas. Agar $(x, y) \in R \subseteq S \times S$ bo'lsa, odatda xRy ko'rinishda yoziladi va x y bilan R munosabatda deyiladi. Bir qancha misollar bu masalani oydinlashtiradi.

(I). R – haqiqiy sonlar to'plamidagi " $<$ " munosabati bo'lsin. Bundan kelib chiqadiki, $R = \{(x, y) \in R \times R \mid x < y\}$.

⁴ Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики. Учебно-пособие. Москва. «Академия». 2014 272 с. 18-20 betlar mazmuni olingan

(II). m natural sonini olamiz va eslatib o'tamizki, agar $a \in \mathbb{Z}$, va $m \mid a$ bo'lsa, demak a soni m ga karrali. \mathbb{Z} butun sonlar to'plamidagi R munosabat quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$$aRb \Leftrightarrow m \mid (a - b).$$

E'tibor beringki, biz bu munosabat bilan 2.1.3.- bo'limda tanishgan edik.

Bu munosabat, avval ko'rganimizdek, " m modul bo'yicha taqqoslanadigan (teng qoldikli) sonlar" deyiladi. Shunday qilib. Agar $m=7$ bo'lsa. $1 \equiv 15 \pmod{7}$ deb aytish mumkin, buni biz "1 soni 15 ga 7 modul bo'yicha kongruent", deb ham o'qiymiz

E'tibor beringki, xususan, $m = 7$ bo'lsa, 7 modul bo'yicha taqqoslanadigan butun sonlarninig umumiy ko'rinishi $-1 + 7k$ shaklda bo'ladi, bu yerda $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(III). $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bo'lsin. S to'plamdagi R munosabatni 0 va 1 sonlaridan tuzilgan P matrisani ko'rsatish orqali ifodalashimiz mumkin. Bu yerda qator va ustunlar S to'plam elementlari bilan 1, 2, 3, 4, 5, 6 tartibda belgilanib, "1" soni i qator va j ustunda tursa. iRj ko'rinishda belgilanadi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu misolda biz ixtiyoriy $s \in S$ uchun sRs bo'lishini ko'ramiz. xRy to'g'ri munosabatni ifodasini yozib qo'yishda hech qanday muammoga duch kelmaysiz.

(IV). Mana mening sevimli misollarimdan biri. $T_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ to'plamning barcha 2-elementli to'plam ostilaridan iborat bo'lsin. R munosabatni T_5 da $A_1RA_2 \Leftrightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ko'rinishda belgilaymiz. Bu misolda $|R|$ ni hisoblah mumkinmi (quyidagi 3-mashqqa qarang)?

T_5 ni grafning uchlari to'plami bo'ladigan qilib misol shartini o'zgartirishingiz mumkinmi?

(V). Haqiqiy sonlar o'qi R da R munosabatni $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ kabi aniqlaymiz. π soniga mos elementni toping.

Nazorat uchun savollar

1. Munosabat moslikning xususiy holi ekanini, ya'ni $G \subset X \times X$ ekanini izohlang.
2. Munosabat xossalari graflarda tasvirlang.
3. Refleksiv, simmetrik, antisimmetriklik, tranzitiv munosabatlarni graflar yordamida tushuntiring.