3-ma’ruza: To‘plamlarni sinflarga ajratish.

Ma’ruza matni:

Ma’ruza mashg‘ulotining rejasi:

1. **To‘plamlarni o‘zaro kesishmaydigan to‘plam ostilariga (sinflarga) ajratish tushunchasi.**
2. **To‘plamlarni bitta, ikkita va uchta xossaga ko‘ra sinflarga ajratish.**

1.To‘plamlarni sinflarga ajratish.

Ta’rif: A to‘plam quyidagi 2 shartni qanoatlantirsa u $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ sinflarga ajratilgan deyiladi.

1) $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ qism to‘plamlar jufti-jufti bilan o‘zaro kesishmasa, ya’ni $A_i \cap A_j = \varnothing$, bu yerda $i, j = 1, 2, ..., n, ...$ va $i \neq j$;

2) $A_1, A_2, ..., A_n, ...$qism to‘plamlarning birlashmasi A to‘plam bilan mos tushsa ya’ni $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cap ...$

To‘plamlarni sinflarga ajratish masalasi klassifikatsiya deyiladi. Klassifikatsiya – bu sinf ichida ob’ektlarning o‘xshashligi va ularning boshqa sinflardagi ob’ektlardan farq qilishi asosida sinflar bo‘yicha ob’ektlarni ajratish amalidir.

Agar yuqoridagi shartlardan aqalli bittasi bajarilmasa, klassifikatsiya noto‘g‘ri hisoblanadi.

Masalan: uchburchaklarning A to‘plamini uchta sinfga ajratish mumkin: o‘tkir burchakli, to‘g‘ri burchakli, o‘tmas burchakli uchburchaklar. Haqiqatan ham, ajratilgan to‘plam ostilari jufti-jufti bilan kesishmaydi. Boshqacha aytganda, birinchidan, o‘tkir burchakli uchburchaklar ichida o‘tmas va to‘g‘ri burchakli uchburchaklar yo‘q, to‘g‘ri burchakli uchburchaklar ichida o‘tkir va o‘tmas burchakli uchburchaklar yo‘q, shuningdek o‘tmas burchakli uchburchaklar ichida o‘tkir va to‘g‘ri burchakli uchburchaklar yo‘q.

Ikkinchidan, o‘tkir, to‘g‘ri va o‘tmas burchakli uchburchaklar birlashmasi uchburchaklar to‘plami A to‘plam bilan mos tushadi.

To‘plamlarni sinflarga ajratishda sinflar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin.

Masalan: Natural sonlar to‘plamini bir necha usul bilan sinflarga ajratish mumkin.

1. toq va juft sonlar sinfi;
2. tub va murakkab sonlar sinfi;
3. bir xonali, ikki xonali, uch xonali,…,xonali sonlar sinfi:

Bunda 1. va 2. holda sinflar soni chekli; 3.- holda sinflar soni cheksiz.

Shuning bilan birga berilgan to‘plamning har qanday qism to‘plamlari sistemasi ham to‘plamni sinflarga ajratishni ifodalayvermasligini qayd qilish kerak.

Masalan: A uchburchaklar to‘plamidan, teng yonli, teng tomonli, turli tomonli uchburchaklar to‘plam ostilarini olsak, u holda u A to‘plamni sinflarga ajrata olmaydi, chunki birinchi shart bajarilmaydi. Chunki teng yonli va teng tomonli uchburchaklar to‘plami ostilari kesishadi, ya’ni hamma teng tomonli uchburchaklar teng yonli uchburchaklardir.

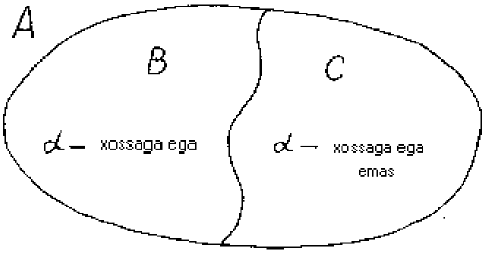
2.To‘plamlarni bitta, ikkita va uchta xossaga ko‘ra sinflarga ajratish To‘plamlarni qism to‘plamlarga ajratish uchun, qism to‘plam elementlarini xarakteristik xossalarini ko‘rsatish kerak. To‘plamlarni bitta, ikkita, uchta xossasiga ko‘ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

Aytaylik, A to‘plam va biror α xossa berilgan bo‘lsin. A to‘plam elementlari α xossaga ega bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Bu holda A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan ikkita B va C to‘plam ostilarga ajraladi.

B to‘plam A to‘plamning α xossasiga ega bo‘lgan elementlari to‘plami, C to‘plam A to‘plamning α xossasiga ega bo‘lmagan elementlari to‘plami $B \bigcup C = A$ va $B \bigcap C \neq \varnothing$

Agar A to‘plamning hamma elementlari α xossaga ega bo‘lsa, u holda $C = \varnothing$ bo‘ladi, agar A to‘plamning hamma elementlari α xossaga ega bo‘lmasa $B = \varnothing$ bo‘ladi.

Agar B va C to‘plamlar bo‘sh bo‘lmasa, u holda A to‘plamni Eyler Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlash mumkin. (9-chizma)



9-chizma

Masalan: A – auditoriyadagi talabalar to‘plami, α -sinovlarni topshirganlik xossasi bo‘lsa, B -sinovlarni topshirgan, C esa sinovlarni topshirmagan talabalar to‘plami bo‘ladi.

Endi to‘plamni ikkita xossaga ko‘ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

A to‘plam va α, β xossalar berilgan bo‘lsin. A to‘plam elementlari α, β xossalarga ega bo‘lishi, bo‘lmasligi ham mumkin.

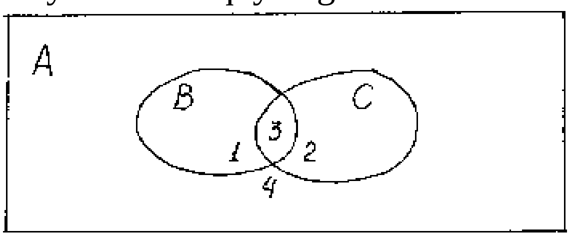
a) α xossaga ega bo‘lgan va β xossaga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 1 sinf;

b) α xossaga ega bo‘lmagan va β xossaga ega bo‘lgan elementlar to‘plami – 2 sinf;

v) α va β xossalarga ega bo‘lgan elementlar to‘plami – 3 sinf;

g) α va β xossalarga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 4 sinf.

Bu sinflardan ayrimlari bo‘sh to‘plam ham bo‘lishi mumkin. Bu 4 ta sinf Eyler-Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlanadi. (10-chizma)

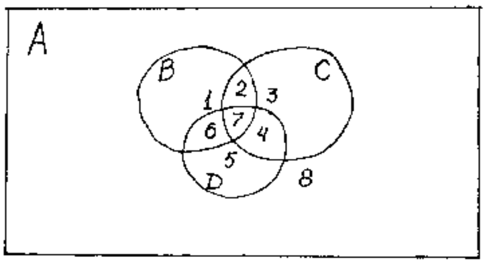


10-chizma

To‘plamni 3 ta xossaga ko‘ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

A to‘plam va α, β, γ xossalar berilgan bo‘lsin. A to‘plam α, β, γ xossalarga ega bo‘lishi ham bo‘lmasligi ham mumkin. Bu uchta xossa A to‘plamni sakkizta sinfga ajratishi mumkin.

a) α xossaga ega bo‘lgan va β, γ xossalarga ega bo‘lmagan to‘plam – 1 sinf;
b) α va β xossalarga ega bo‘lgan va γ xossaga ega bo‘lmagan to‘plam – 2 sinf;
v) β xossaga ega bo‘lgan va α, γ xossalarga ega bo‘lmagan to‘plam – 3 sinf;
g) β, γ xossalarga ega bo‘lgan va α xossaga ega bo‘lmagan to‘plam – 4 sinf;
d) γ xossaga ega bo‘lgan va α, β xossalarga ega bo‘lmagan to‘plam – 5 sinf;
e) α, γ xossalarga ega bo‘lgan va β xossaga ega bo‘lmagan to‘plam – 6 sinf;
j) α, β va γ xossalarga ega bo‘lgan to‘plam – 7 sinf;
z) a, β va γ xossalarga ega bo‘lmagan to‘plam – 8 sinf.



11-chizma

Bu sinflardan ayrimlari bo‘sh to‘plam ham bo‘lishi mumkin. Bu 8 ta sinf 11-chizmada tasvirlangan.

Nazorat uchun savollar

1. To‘plamlarni sinflarga ajratishni ta’riflang.
2. To‘plamlarni sinflarga ajratishga misollarkeltiring.
3. To‘plamlarni bitta, ikkita, uchta xossaga ko‘ra sinflarga ajrating.
4. Ajratishni misollar yordamida va Eyler -Venn diagrammasi orqali tushuntirib bering.

1. **Ikki to‘plam elementlari orasidagi moslik.**

Ikki to‘plam elementlari orasidagi moslikni ko‘rishdan oldin, ikki to‘plam dekart ko‘paytmasi va uning qism to‘plamlarini misollar yordamida eslaylik. Aytaylik bizga $X = \{a, b, c\}$ va $Y = \{m, n\}$ to‘plamlari berilgan bo‘lsin. U holda

$$X \times Y = \{(a;m), (a;n), (b;m), (b;n), (c;m), (c;n)\}$$

ga ega bo‘lamiz. Bu dekart ko‘paytma 64 ta qism to‘plamga ega.

1-Ta’rif $X \times Y$ dekart ko‘paytmaning istalgan G_f qism to‘plami X va Y to‘plamlar orasidagi binar moslik deyiladi. Binar so‘zi lotincha **bis** so‘zidan olingan bo‘lib, ikki to‘plam elementlari orasida so‘z borishini bildiradi.

Moslik lotin alifbosining f, d, t, s kabi harflari bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi: f: A → B yoki $A \xrightarrow{f} B$.

Bizga ma’lum bo‘lgan funksiyalarning hammasi moslik tushunchasiga misol bo‘la oladi.

X to‘plam moslikning birinchi to‘plami deyiladi. X to‘plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to‘plami moslikning aniqlanish sohasi deyiladi.

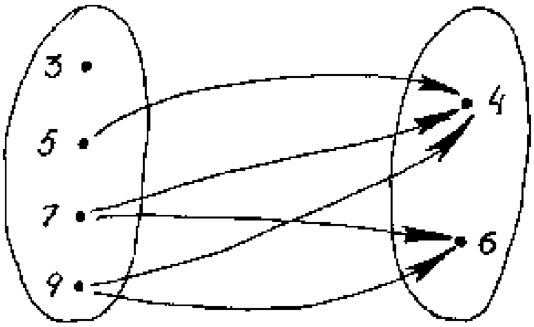
Y to‘plam moslikning ikkinchi to‘plami deyiladi. Y to‘plamning moslikda qatnashgan elementlari to‘plami moslikning qiymatlar to‘plami deyiladi.

$G_f \subset X \times Y$ to‘plam moslikning grafigi deyiladi. G_f grafik biror R moslikdagi (x, y) juftliklar to‘plami ya’ni xRy, bu yerda $x \in X,\ y \in Y$

Ikki to‘plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo‘nalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar moslikning grafi deyiladi.

Chekli to‘plamlar orasidagi moslik graflar yordamida ko‘rgazmali tasvirlanadi.

Misollar: 1. $X = \{3,5,7,9\}$ va $Y = \{4,6\}$ to‘plamlar orasidagi «katta» mosligining grafigini yasaymiz. Buning uchun berilgan to‘plamlar elementlarini nuqtalar bilan belgilaymiz va X to‘plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalardan Y to‘plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalarga strelkalar o‘tkazamiz (12-chizma)

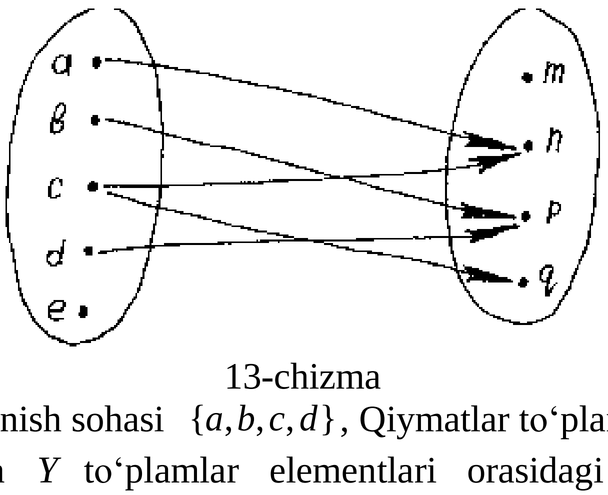


12-chizma

Natijada biz X va Y to‘plamlar elementlari orasidagi «katta» mosligiga ega bo‘lamiz .

2. $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{m, n, p, q\}$

$G_f = \{(a;n), (b;p), (c;n), (c;q), (d;p)\}$ grafini chizaylik (13-chizma)

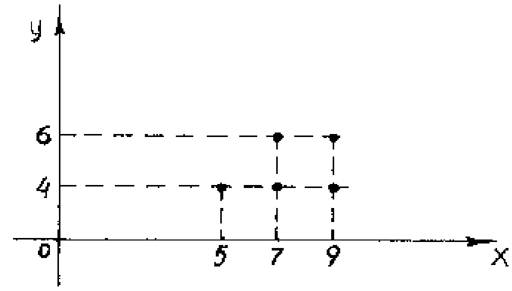


13-chizma

Bunda aniqlanish sohasi $\{a, b, c, d\}$, Qiymatlar to‘plami $\{n, p, q\}$.

Sonli X va Y to‘plamlar elementlari orasidagi moslik koordinata tekisligidagi grafik yordamida tasvirlanadi.

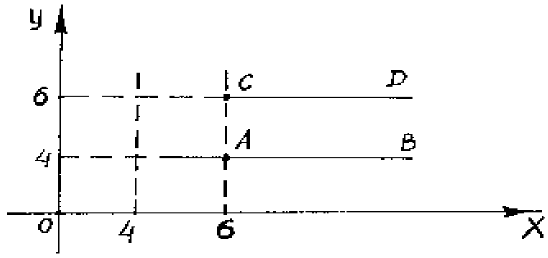
Buning uchun R moslikda bo‘lgan barcha sonlar jufti koordinata tekisligida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Buning natijasida hosil bo‘lgan figura R moslikning grafigi bo‘ladi. Yuqoridagi misolni grafigini chizamiz. (14-chizma)



14-chizma

Moslikni bunday tasvirlash ularni berilgan moslikda cheksiz ko‘p sonlar jufti bo‘lganda ko‘rgazmali tasvirlash imkonini beradi.

Masalan: $X = R$ va $Y = \{4,6\}$ to‘plamlar orasidagi «katta» mosligini qaraylik va grafigini yasaylik moslikni [AB) va [CD) nurlar ifodalaydi. (15-chizma)



15-chizma

Ta’rif. Agar ikkita X va Y to‘plamlar orasidagi mosliklarning G_f grafigi $X \times Y$ dekart ko‘paytmasi bilan ustma-ust tushsa, bu moslik to‘la moslik deyiladi. Agar moslik grafigi G_f, bo‘sh bo‘lsa $(G_f = \varnothing)$ moslik bo‘sh moslik deyiladi.

Ixtiyoriy ikkita X va Y to‘plamlar orasida bo‘sh va to‘la mosliklar mavjud bo‘lishi mumkin.

X va Y dekart ko‘paytma to‘plam ostilari ustida turli xil amallarni bajarish mumkin.

Masalan, X va Y to‘plamlar orasida berilgan xRy va xKy mosliklar mosliklar birlashmasi deb, ularning grafiklari birlashmasidan iborat xSy moslikka aytiladiki, xSy moslik faqat va faqat xRy yoki xKy mavjud bo‘lsa bo‘ladi.

To‘plamlar orasidagi moslik

A va *B* to‘plamlari bo‘lsin, *A* bilan *B* orasidagi moslik *A* dan *B* gacha bo‘lgan oddiy amaldir; *f*: $A \to B$ yoki $A \to B$ yozuv orqali ifodalaymiz

Bir qancha misollar keltirsak (ba`zilari tanish)

- $f: R \to R$ $f(x)=x^2-x+1$, $x \in R$ *orqali berilgan*
- $f: R \to C$ $f(x)=(x-1)+ix^2$, $x \in R$ *orqali berilgan*
- $Z+ \subseteq Z$ musbat tub son to‘plami bo‘lsin va $g(m)=\cos(2\pi/n)$, $n \in Z^+$ orqali $g: Z^2 \to R$ aniqlansin
- $h: R \times R \to R$ $f(x,y)=x-y$, $x,y \in R$ *orqali berilgan*
- $\gamma: R \times R \to R$ $\gamma(x,y)=x^2+y^2$ *orqali berilgan*
- $q: Z \to Z$ $q(n)=\frac{1}{2}(n^2+n)$, $n \in Z$ *orqali berilgan*
- $\mu: Z^+ \to \{-1,0,1\}$ quyidagi orqali berilgan

$$\mu(n)=\begin{cases} 1 \quad \text{agar } n \text{ farqli bosh sonlarning juft soni natijasi bo‘lsa} \\ -1 \quad \text{agar } n \text{ farqli bosh sonlarning toq soni natijasi bo‘lsa} \\ 0 \quad \text{agar } n \text{ farqli bosh sonnig natijasi bo‘lmasa} \end{cases}$$

Shu sababli, misol uchun $\mu(1)=0$. Shuningdek, $\mu(6)=1$, ikkita farqli bosh sonning natijasi $6=2\cdot3$ kabidir. Shunga o‘xshash, $\mu(5)=\mu(30)=-1$ va $\mu(18)=0$

- $h:R\times R\to C \quad h(x,y)=x=iy,\ x,y\in R$ *orqali berilgan*
- $\sigma:\{1,2,3,4,5,6\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$ quyidagi orqali tasvirlangan

$$\sigma:\begin{Bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ 2\,5\,3\,4\,1\,6 \end{Bmatrix}$$

Agar $f: A\to B$ moslik bo‘lsa, biz A ni f ning sohasi, B ni esa f ning teskari sohasi deb ataymiz. f ning ranggi esa $\{f(a)|a\in A\}\subseteq B$ qism to‘plamdir.

Ba`zi ta’riflar. A va B to‘plamlar va $f: A\to B$ bo‘lsin. Aytamizki,

Agar $x,y\in A, x\neq y$ *bo‘lganda* $f(x)\neq f(y)$ *bo‘lsa, f* ***birga-bir*** *(yoki* ***in’yektiv****) deyiladi.*

Agar *ixtiyoriy* $z\in B$ *uchun biror* $x\in A$ *element topilib,* $f(x)=z$ *bo‘lsa, f* ***ustiga*** *(yoki* ***sur’yektiv****) deyiladi.*

Agar f ham birga-bir, ham ustiga bo‘lsa, f ***bi’yektiv*** *deyiladi.*

Keyingi ta’rif nihoyatda foydalidir. A va B to‘plamlar va $f:A\to B$ *moslik bo‘lsin.* $b\in B$ *bo‘lsin;* $f^{-1}(b)$ *bo‘lib yozilgan, b usti f aksi*

$$f^{-1}(b)=\{a\in A|f(a)=b\}\subseteq A \text{ to‘plamidir.}$$

Iltimos aslini teskari funksiya f^{-1} bilan aloqador biror narsa bilan adashtirmang, chunki u mavjud bo‘lmasligi mumkin! E’tiborga olingki, $b\in B$ bo‘lsa, b larning asli bo‘sh to‘plam bo‘lishi mumkin. Shunday bo‘lsa ham, agar biz $f: A\to B$ ustiga ekanligini bilsak, unda B dagi har bir elementining asli bo‘sh bo‘lmaydi. Agar aslida, har bir $b\in B$ uchun b ning $f^{-1}(b)$ *asli yagona elementdan tashkil topsa, unda f ning biyeksiya ekanligi kafolatlanadi.*

Nihoyat, $f: A\to A$ moslik o‘rin almashtirish deyiladi, agar u biyeksiya bo‘lsa. Bundan ko‘rinib turibdiki, agar $|A|=n$ bo‘lsa, A da $n!$ biyeksiyalar mavjud.

Mashqlar:

$f: B\to B$ kvadrat funksiya bo‘lsin. Barcha $x\in R$ *lar* uchun $f(x)=ax^2+bx+c$ bo‘ladigan ixtiyoriy haqiqiy o‘zgarmas $a,b,c\in R$ *va* $a\neq0$ *sonlar mavjud. f in`yektiv ham, sur`yektiv ham bo‘lolmasligini isbotlaydi.*