

28-amaliy mashg'ulot.

Tub va murakkab sonlar. Eratosfen g'alviri. Tub sonlar to'plamining cheksizligi. Sonlarning eng kichik umumiy karralisi va eng katta umumiy bo'luvchisi, ularning asosiy xossalari va topish

Amaliy mashg'ulotining rejasi:

1. Tub va murakkab sonlar.
2. Arifmetikaning asosiy teoremasi.
3. Yevklid teoremasi.

Tub va murakkab sonlar. Narsalarni sanashda ish-latiladigan sonlar *natural sonlar* deyiladi. Barcha natural sonlar hosil qilgan cheksiz to'plam $7V$ harfi bilan belgilanadi: $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

Natural sonlar to'plamida eng katta son (element) mavjud emas, lekin, eng kichik son (element) mavjud, u 1 soni. 1 soni faqat 1 ta bo'luvchiga ega (1 ning o'zi). 1 dan boshqa barcha natural sonlar kamida ikkita bo'luvchiga ega (sonning o'zi va 1).

1 dan va o'zidan boshqa natural bo'luvchiga ega bo'l-magan 1 dan katta natural son *tub son* deyiladi. Masalan, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sonlar 20 dan kichik bo'lgan barcha tub sonlardir. 1 dan va o'zidan boshqa natural bo'luvchiga ega bo'lgan 1 dan katta natural son *murakkab son* deyiladi. Masalan, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 sonlar 20 dan kichik bo'lgan barcha murakkab sonlardir.

Tub va murakkab sonlarga berilgan ta'riflardan 1 soni na tub, na murakkab son ekanligi ma'lum bo'ladi. Bunday xossaga ega natural son faqat 1 ning o'zidir.

Natural sonlarning ayrim xossalarini qaraymiz.

1- xossa. Har qanday $p > 1$ natural sonining 1 ga teng bo'lmagan bo'luvchilarining eng kichigi tub son bo'ladi.

Isbot. $p > 1$ natural sonning 1 ga teng bo'lmagan eng kichik bo'luvchisi q bo'lsin. Uni murakkab son deb faraz qilaylik. U holda murakkab sonning ta'rifiga ko'ra, q soni $1 < q_1 < q$ shartga bo'ysunuvchi q_1 bo'luvchiga ega bo'ladi va q_1 soni p ning ham bo'luvchisi bo'ladi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas. Demak, q — tub son.

2- x o s s a. Murakkab p sonining 1 dan katta eng kichik bo'luvchisi \sqrt{p} dan katta bo'lmagan tub sonidir.

I s b o t. p — murakkab son, q esa uning 1 dan farqli eng kichik bo'luvchisi bo'lsin.

U holda $p = q \cdot q_1$ (bunda q_1 bo'linma) va $q_1 \geq q$ bo'ladigan q , natural son mavjud bo'ladi. Bu munosabatlardan $p = q \cdot q_1 \geq q \cdot q$ yoki

$$\sqrt{p} \geq q$$

ni olamiz.

1- xossaga ko'ra q soni tub sonidir.

3- xo ssa (Yevklid teoremasi). Tub sonlar cheksiz ko'pdir.

I s b o t. Barcha tub sonlar n ta va ular q_1, q_2, \dots, q_n sonlaridan iborat bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda $b = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n + 1$ soni murakkab son bo'ladi, chunki q_1, q_2, \dots, q_n sonlardan boshqa tub son yo'q (farazga ko'ra). b ning 1 ga teng bo'lmagan eng kichik bo'luvchisi q bo'lsin. 1- xossaga ko'ra, q tub son va q_1, q_2, \dots, q_n sonlarining birortasidan iborat. b va $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$ sonlarining har biri q ga bo'linganligi uchun 1 soni ham q ga bo'linadi. Bundan, $q = 1$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $q \neq 1$ ekanligiga zid. Farazimiz noto'g'ri. Demak, tub sonlar cheksiz ko'p.

Biror « sonidan katta bo'lmagan tub sonlar jadvalini tuzishda Eratosfen g'alviri deb ataladigan oddiy usuldan foydalanadilar. Uning mohiyati bilan tanishamiz. Ushbu:

$$1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

sonlarini olaylik. (1) ning 1 dan katta birinchi soni 2; u faqat 1 ga va o'ziga bo'linadi, demak, 2 tub son. (1) da 2 ni qoldirib, uning karralisi bo'lgan hamma murakkab sonlarni o'chi-ramiz; 2 dan keyin turuvchi o'chirilmagan son 3; u 2 ga bo'linmaydi, demak, 3 faqat 1 ga va o'ziga bo'linadi, shu-ning uchun u tub son. (1) da 3 ni qoldirib, unga karrali bo'lgan hamma sonlarni o'chiramiz; 3 dan keyin turuvchi o'chirilmagan birinchi son 5 dir; u na 2 ga va na 3 ga bo'linadi. Demak, 5 faqat 1 ga va o'ziga bo'linadi, shuning uchun u tub son bo'ladi va h.k.

Agar p tub son bo'lib, p dan kichik tub sonlarga bo'linadigan barcha sonlar yuqoridagi usul bilan o'chirilgan bo'lsa, p^2 dan kichik barcha o'chirilmay qolgan sonlar tub son bo'ladi. Haqiqatan, bunda p^2 dan kichik har bir murakkab a son, o'zining eng kichik tub bo'luvchisining karralisi bo'l-gani uchun o'chirilgan bo'ladi. Shunday qilib:

- a) tub son p ga bo'linadigan sonlarni o'chirishni p^2 dan boshlash kerak;
- b) n dan katta bo'lmagan tub sonlar jadvalini tuzish, \sqrt{n} dan katta bo'lmagan tub sonlarga bo'linuvchilarini o'chirib bo'lingandan keyin tugallanadi.

1- m i s o l. 827 sonining eng kichik tub bo'luvchisini toping.

Y e c h i s h. $\sqrt{827}$ dan kichik bo'lgan tub sonlar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ekanligini aniqlab, 827 ni shu sonlarga bo'lib chiqamiz. 827 u sonlarning hech qaysisiga bo'linmaydi, bundan 827 ning tub son ekanligi kelib chiqadi.

2- m i s o l. 15 va 50 sonlari orasida joylashgan tub sonlarni aniqlang.

Yechish. 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37,

38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50 sonlarni olib, 2, 3, 5, 7 ga karrali sonlarning

tagiga chi-zamiz. 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47 sonlari izlangan tub sonlardir.

Natural sonlar qatorida tub sonlar turlicha taqsim-langan. Ba'zan qo'shni tub sonlar bir- biridan 2 gagina farq qiladi, masalan, 11 va 13, 101 va 103 va hokazo. Bu sonlar *egizak tub sonlar* deyiladi. Egizak tub sonlar to'p-lamining chekli yoki cheksizligi hozirgacha noma'lum. Hisoblash mashinalari yordami bilan juda katta tub sonlar topilgan. Masalan, 25000 xonali $2^{86243} - 1$ son tub sonidir.

1-teorema (arifmetikaning asosiy teoremasi). Har qanday murakkab son tub sonlar ko'paytmasiga yoyiladi va agar ko'paytuvchilarning yozilish tartibi nazarga olinmasa, bu yoyilma yagonadir.

Isbot. α , — murakkab son, q_1 esa uning eng kichik tub bo'luvchisi bo'lsin. a_1 ni q_1 ga bo'lamiz: $a_1 = q_1 \cdot a_2$ ($a_2 < a_1$). Agar a_2 tub son bo'lsa, a_1 son tub ko'paytuvchilarga yoyilgan

$$a_2 = q_2 \cdot a_3 \quad (a_3 < a_2).$$

bo'ladi. Aks holda, a_2 ni q_2 ga bo'lamiz: $a_2 = q_2 \cdot a_3$ ($a_3 < a_2$).

Agar a_3 tub son bo'lsa, a_1 bo'ladi. q_1, q_2, a_3 sonlari tub sonlar bo'lgani uchun, a_1 soni tub ko'paytuvchilarga yoyilgan bo'ladi. Agar a_3 murakkab son bo'lsa, yuqoridagi jarayon davom ettiriladi. ekanligidan ko'rinadiki, bir necha qa-damdan so'ng albatta

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

tub soni hosil bo'ladi va a_1 soni $a_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot a_n$ shaklni oladi. Demak, har qanday natural son tub ko'paytuvchilarga yoyiladi. a soni ikki xil ko'rinishdagi tub

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \quad (2)$$

$$a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n \quad (3)$$

ko'paytuvchilar yoyil- masiga ega bo'ladi, deb faraz qilaylik:

U holda

$$q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \quad (4)$$

(2) tenglikning ikki tomonida hech bo'lmaganda bittadan tub son topiladiki, u sonlar

bir-biriga teng bo'ladi. $p_1 = q_1$ deb faraz qilaylik. Tenglikning ikkala tomonini

qisqartirsak, $q_2 \cdot \dots \cdot q_n = p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ bo'ladi. Bu tenglikustia ham yuqoridagidak mulonaza yuritsak, $q_3 \cdot \dots \cdot q_n = p_3 \cdot \dots \cdot p_k$ bo'ladi va hokazo. Bu jarayonni davom ettirsak, $n - 1$ qadamdan so'ng $1 = p_{n+1} \cdot \dots \cdot p_k$ tenglikni olamiz. Bundan

$$p_{n+1} = 1, \dots, p_k = 1$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, yoyilma yagona ekan.

a sonini tub ko'paytuvchilarga yoyishda ba'zi ko'paytuvchilar takrorlanishi mumkin. $q_1 < q_2, \dots,$

q_n ko'paytuv-chilarning takrorlanishlarini mos ravishda $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ orqali

belgilasak, $a = q_1^\alpha \cdot q_2^\beta \cdot \dots \cdot q_n^\gamma$ hosil bo'ladi. Bu a sonining *kanonik yoyilmasidir*.
Masalan,

$$105840 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Natural sonlarning kanonik yoyilmasidan foydalanib, uning bo'luvchilarini va bo'luvchilar sonini topish mumkin.

2- teorema. a natural sonining kanonik yoyilmasi $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ bo'lsin. U holda a ning har qanday bo'luvchisi $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ ko'rinishda bo'ladi, bunda $0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ ($k = \overline{1, n}$).

Isbot. a soni d ga bo'linsin. $a = dq$. U holda a ning hamma tub bo'luvchilari mavjud va ularning darajalari d ning kanonik yoyilmasidagi darajalaridan kichik bo'lmaydi. Shunga ko'ra, d bo'luvchi $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ yoyilmaga ega va a ning d ga bo'linishi ayon.

Misol tariqasida 48 ning bo'luvchilarini topaylik. $48 = 2^4 \cdot 3$ bo'lganligidan, uning bo'luvchilari quyidagicha topiladi: $2^0 \cdot 3^0, 2^1 \cdot 3^0, 2^2 \cdot 3^0, 2^3 \cdot 3^0, 2^4 \cdot 3^0, 2^0 \cdot 3^1, 2^1 \cdot 3^1, 2^2 \cdot 3^1, 2^3 \cdot 3^1, 2^4 \cdot 3^1, 2^1 \cdot 3^1$. a natural sonining natural bo'luvchilari soni $\tau(a)$ bilan belgilanadi.

3-teorema. Agar a natural sonining kanonik yoyilmasi $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ bo'lsa, $\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. 2-teoremaga asosan $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ sonining har bir bo'luvchisi $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ ko'rinishda bo'ladi. β_1 , ifoda $0; 1; 2; \dots; \alpha_1$, qiymatlarni qabul qiladi. Shu kabi β_2 , ifoda $0; 1; 2; \dots; \alpha_2$ ta qiymatni qabul qiladi va hokazo. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ qiymatlarning ixtiyoriy kombinatsiyasi a sonining biror bo'luvchisini aniqlaydi. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ qiymatlarning mumkin bo'lgan kombinatsiyalarining va demak, a ning natural bo'luvchilarining soni $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$ ga teng. Ba'zi hollarda natural son bo'luvchilarining yig'indisini topishga to'g'ri keladi. Bunday hollarda, natural son bo'luvchilarining yig'indisi $\delta(a)$ ni hisoblash formulasi dan foydalanish mumkin.

$$\delta(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

3- m i s o l. 20 ning bo'luvchilari sonini va bo'luvchilari yig'indisini toping.

Y e c h i s h. $20 = 2^2 \cdot 5^1$ bo'lgani sababli, 20 ning bo'luvchilari soni $\tau(20) = (2 + 1)(1 + 1) = 6$, bo'luvchilarining yig'indisi esa

$$\delta(20) = \frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} = 7 \cdot 6 = 42$$

bo'ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Tub va murakkab sonlar deb nimaga aytiladi?
2. Arifmetikaning asosiy teoremasi
3. Evklid teoremasi haqida ma'lumot bering.

