27-amaliy mashg‘ulot.

Nomanfiy butun sonlar yig‘indisi va ko‘paytmasining bo‘linishi.

Ma’ruza mashg‘ulotining rejasi:

1. **Nomanfiy butun sonlar yig‘indisi, uning mavjudligi va yagonaligi.**
2. Nomanfiy butun sonlar **ko‘payt**masi ta’rifi.
3. Nomanfiy butun sonlar **ko‘payt**masining mavjudligi va yagonaligi.
4. **Nomanfiy butun sonlar** ko‘payt**masining xossalari.**

Ma’ruza matni.

1.Nomanfiy butun sonlar yig‘indisi, uning mavjudligi va yagonaligi. To‘plamlar ustida bajariladigan har bir amalga shu to‘plamlar bilan aniqlanadigan sonlar ustidagi amallar mos keladi. Masalan, o‘zaro kesishmaydigan ***A* va *B* to‘plamlar birlashmasidan iborat C to‘plam** *Ava* ***B* to‘plamlar bilan aniqlanadigan *a va b* nomanfiy butun sonlarning yig‘indisi deb ataluvchi *c* sonni aniqlaydi.**

6-ta’rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning ***yig‘indisi*** *deb* $n(A)=a$; $n(B)=b$ *bo‘lib, kesishmaydigan A va B to‘plamlar birlashmasidagi elementlar soniga aytiladi.*

$a + b = n(A\cup B)$, *bu yerda* $n(A) = a$; $n(B) = b$ *va* $\boldsymbol{A}\cap \boldsymbol{B} = \varnothing$.

Berilgan ta’rifdan foydalanib, 5 + 2 = 7 bo‘lishini tushuntiramiz. 5 — bu biror A to‘plamning elementlari soni, 2 — biror B to‘plamning elementlari soni, bunda ularning kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lishi kerak. Masalan, $A = \{x; y; z; t; p\}$, $B= \{a; b\}$to‘plamlarni olamiz. Ularni birlashtiramiz: $A \vee B = \{x; y; z; t; p; a; b\}$. Sanash yo‘li bilan $n(A \vee B) = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, 5 + 2 = 7.

Umuman, $a + b$ yigindi $n(A)=a$, $n(B)=b$ shartni qanoatlantiruvchi kesishmaydigan A va B to‘plamlarning tanlanishiga bog‘liq emas. Bu umumiy da’voni biz isbotsiz qabul qilamiz.

Bundan tashqari, butun nomanfiy sonlar yig‘indisi har doim mavjud va yagonadir. Boshqacha aytganda, biz qanday ikkita nomanfiy a va b sonlar olmaylik, ularning yig‘indisi — butun nomanfiy c sonni har doim topish mumkin. U berilgan a va b sonlar uchun yagona bo‘ladi.

Yigindining mavjudligi va yagonaligi ikki to‘plam birlashmasining mavjudligi va yagonaligidan kelib chiqadi.

Yigindi ta’rifidan foydalanib, «kichik» munosabatiga boshqacha ta’rif berish mumkin:

7-ta’rif. $\forall a, b \in N$ uchun $a = b + c$bo‘ladigan c son topilsa, $b < a$(yoki $a > b$) deyiladi.

$(\forall a, b \in N)(\exists c \in N)(b < a \Leftrightarrow a = b + c)$.

1.6. Qo‘shish amalining xossalari.

1°. Qo‘shish amali kommutativdir:

$$(\forall a, b \in N_0)(a+b=b+a),$$

ya'ni ixtiyoriy nomanfiy butun a va b sonlar uchun $a + b = b + a$ tenglik o'rinli.

Isbot. $a = n(A)$, $b = n(B)$ *va* $A \cap B = \emptyset$ *bo'lsin,*

$$a+b=n(A \cup B)=n(B \cup A)=b+a$$

(to'plamlar birlashmasining kommutativligiga asosan).

2°. Qo'shish amali assotsiativdir:

$(\forall a, b, c \in N_0)\ a + (b + c) = (a + b) + c).$

Isbot: $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ *va* $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ *bo'lsin.*

$$a + (b + c) = n(A \cup (B \cup C)),$$

$$(a + b) + c = n((A \cup B) \cup C)$$

to'plamlar birlashmasining assotsiativligiga ko'ra

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Demak, $a + (b + c) = (a + b) + c.$

3°. 0 ni yutish qonuni:

$$(\forall a \in N_0)\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}.$$

Isbot.

$a = n(A)$, $0 = n(\emptyset)$, $a + 0 = n(A \cup \emptyset) = n(A) + n(\emptyset)$, $A \cup \emptyset = A$ *bo'lgani uchun.*

4°. Qo'shish amali qisqaruvchandir:

$$(\forall a, b, c \in N_0)\ a + c = b + c. \Leftrightarrow a = b,$$

Isbot. $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(Q)$ *bo'lsin.* $A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C$ *bo'ladi. Qo'shish amali ta'rifidan* $N(A) = n(B) \Rightarrow n(A \cup C) = n(B \cup Q$, $a = b \Rightarrow a + c = b + c.$

5°. Qo'shish amali monotondir:

$$(\forall a, b, c \in N_0)\ a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

Isbot. $a = n(A)$, $b = n(B)$ *bo'lsin.*

$$a < b \Rightarrow A \sim B_1 \subset B, \text{ bu yerda } B_1 \neq B,\ B_1 \neq \emptyset, \text{u holda}$$

$$A \cup C \sim B_1 \cup C \subset B \cup C \Rightarrow a + c < b + c.$$

«<» munosabati N_0 to'plamda qat'iy tartib munosabati bo'lishini isbot qilamiz. Buning uchun «<» munosabatining tranzitiv va asimmetrik ekanligini ko'rsatamiz.

a) tranzitivligi: $a < b \wedge b < c$ bo'lsin, 7-ta'rifga ko'ra, shunday k *va* h sonlar topiladiki, $b = a + k v\ a c = b + h$ bo'ladi, bundan $c = b + h = (a + k) + h v$ a qo'shishning assotsiativligiga ko'ra $c = a + (k + h)$ ekanligini yozish mumkin, bu esa $a < c$ degan xulosani beradi.

b) asimmetriklikni teskarisini faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz. Faraz qilaylik, bir vaqtda $a < b$ va $b < a$ o'rinli bo'lsin. Bundan tranzitivlik xossasiga ko'ra $a < a$ ekanligi kelib chiqadi, demak, farazimiz noto'g'ri va bir vaqtda $a < b$ va $b < a$ bo'lishi mumkin emas, degan xulosaga kelamiz.

2.Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n(A)}$ *va* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{n(B)}$ *bo'lgan* $\boldsymbol{a}$ *va* $\boldsymbol{b}$ *nomanfiy butun sonlar berilgan bo'lsin.*

1-ta'rif. *a va b nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi deb, A×B dekart ko'paytma elementlari sonini ifodalovchi c nomanfiy butun songa aytiladi. Bu yerda* $A\times B = \{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$ ekanini eslatib o'tamiz. Demak, ta'rifga ko'ra:

$a\cdot b = n(A\times B) = c$, bu yerda $a,\ b,\ c\in N_0$,

$a\cdot b = c$ yozuvda a - 1-ko'paytuvchi, b - 2-ko'paytuvchi, c - ko'paytma deyiladi, $c\in N_0$ sonni topish amali esa *ko'paytirish* deyiladi.

Masalan, ta'rifga ko'ra 5 • 2 ko'paytmani topaylik. Buning uchun $n(A) = 5$ va $,n(B) = 2$ bo'lgan $A = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e\},\ B = \{1;\ 2\}$ to'plamlarning dekart ko'paytmasini tuzamiz:

$A\times B=\{(a;\ 1), (a;\ 2), (b;\ 1), (b;\ 2), (c;\ 1), (c;\ 2), (d;\ 1), (d;\ 2), (e;\ 1), (e;\ 2)\}$. Dekart ko'paytma elementlari soni 10 ta bo'lgani uchun $5\cdot 2 = 10$.

3. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasining mavjudligi va yagonaligi.

Teorema. Ikkita nomanfiy butun son ko'paytmasi mavjud va yagonadir.

Ko'paytmaning mavjudligi va yagonaligi berilgan sondagi elementlardan tashkil topgan to'plamlarning dekart ko'paytmasini *tuzish har doim mumkinligi va dekart ko'paytma elementlari soni to'plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog'liq emasligi bilan isbotlanadi.*

4.Ko'paytirish amalining xossalari.

1°. Ko'paytirish amali kommutativdir:

$(\forall a, b \in N_0)\ ab = ba$.

Isbot. ***a = n(A) va b = n(B), A∩B =∅ bo'lsin. A×B≠B×A, shunga qaramay, A×B~B×A (bunda istalgan (a,b)∈A×B juftlikka (b,a)∈B×Ajuftlik mos keltiriladi):***

$$A\times B\sim B\times A \Rightarrow n(A\times B) = n(B\times A)\ ,$$

$$\mathbf{ab} = n(A\times B) = n(B\times A) = \mathbf{ba} \Rightarrow \mathbf{ab} = \mathbf{ba}.$$

2°. Ko'paytirish amali assotsiativdir:

$$(\forall a, b,\ c \in N_0)\ (ab)c = a(bc).$$

Isboti. $(ab)c = n(A), b = n(B), c = n(C)$ va ***A, B, C***lar juft- jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin:

$$\mathbf{(ab)c} = n((A\times B)\times C \ \mathbf{va}\ \mathbf{a(bc)} = n(A\times(B\times C)).$$

Yuqoridagi dekart ko'paytmalar doirasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish yo'li bilan ***(A×B)×C~A×(B×C)***ekanini ko'rsatish mumkin (kombinatorika bo'limidagi ko'paytma qoidasini eslang). Demak:

$$\mathbf{(ab)c} = n((A\times B)\times C = n(A\times(B\times C) = \mathbf{a(bc)}.$$

3°. Ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi:

$$(\forall a, b,\ c \in N_0)\ (a + b)c = ac + bc.$$

Isbot.$a = n(A), b = n(B),\ c = n(C$va ***A, B,***Clar juft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin. To'plamlar nazariyasidan malumki, ***(A ∪ B)×C = (A×C) ∪(B×C)***va ***A∩B =∅⇒(A×C)n n(B×C)*** =× chunki, ***A×Cva B×C***dekart ko'paytmalar elementlari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

$$\mathbf{(a + b)\cdot c} = n((A\cup B)\times C) = n((A\times C)\cup(B\times C)) =$$
$$= n(A\times C) + n(B\times C) = \mathbf{ac + bc}.$$

Demak, $(a + b)c = ac + bc$.

4°. Yutuvchi elementning mavjudligi:

$$(\forall a \in N_0)\ a \cdot 0 = 0.$$

Is b o t. $a = n(A)$, $0 = n(\emptyset)$ bo‘lsin. $A \times \emptyset = \emptyset$ ekanligidan

$$a \times 0 = n(A \times \emptyset) = n(\emptyset) = 0.$$

5°. Ko‘paytirish amalining monotonligi:

$$(\forall a, b, c \in N_0,\ c \neq 0)\ a > b \Rightarrow ac > bc;$$

$$(\forall a, b, c \in N_0)\ a \geq b \Rightarrow ac \geq bc;$$

$$(\forall a, b, c \in N_0,\ c \neq 0)\ a < b \Rightarrow ac < bc.$$

Isbot. Namuna uchun 1-jumlani isbotlaymiz.

$a > b \Rightarrow B \sim A, \subset A$, bu yerda $n(A) = a$, $n(B) = b$, $A_1 \neq \emptyset$, $A_1 \neq A$.

U holda B$\times C \sim (A_1 \times C) \subset (A \times$**C).**

Demak, $n(B \times C) = n(A_1 \times C) < n(A \times C) \Rightarrow bc < ac$.

6°. Ko‘paytmaning qisqaruvchanligi:

$(\forall a, b, c \in N_0,\ c \neq 0)\ ac = bc \Rightarrow a = b.$

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik: $a \neq b$ bo‘lsin. U holda yoki $a < b$, yoki $a > b$ bo‘lishi kerak. $a < b$ bo‘lsa, $ac < bc$ bo‘lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak, $a = b$ ekan.

Ko‘paytmaga yigindi orqali ta’rif berish ham mumkin.

11-ta’rif. $a, b \in N_0$ *bo‘lsin. a sonning b soniga* **ko‘paytmasi** *deb, har biri a ga teng bo‘lgan b ta qo‘shiluvchining yig‘indisiga aytiladi.*

$$ab = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b\ marta}.$$

Bundan $a \cdot 1 = a$ va $a \cdot 0 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta’rif $a = n(A)$, $b = n(B)$, $A \wedge B = \emptyset$ bo‘lgan $A \times B$ dekart ko‘paytma elementlarini sanash malum bir qonuniyatga asoslanishiga bog‘liq.[1]

Miso1. $A = \{a; b; c\}$, $B = \{x; y; z; t\}$.

$A \times B$ dekart ko‘paytmani quyidagi jadval ko‘rinishida yozamiz:

(a; x)	*(a;y)*	*(a; z)*	*(a; t)*
(b; x)	*(b; y)*	*(b ; z)*	*(b; t)*
(c; x)	*(c;y)*	*(c; z)*	*(c; t)*

Dekart ko‘paytma elementlarini ustunlar bo‘yicha sanasak, $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ ga ega bo‘lamiz.

2 ga bo’linish alomati: n soni ikkiga bo’linishi uchun uning o’nli yozuvi 0, 2, 4, 6, 8 raqamlaridan biri bilan tugashi zarur va yetarlidir. Masalan, 2346 ⋮ 2, chunki 6 ⋮ 2.

5 ga bo'linish alomati: n soni 5 ga bo'linishi uchun uning o'nli yozuvi 0 yoki 5 raqam bilan tugashi zarur va yetarlidir. Masalan, 320 ⋮ 5, 1345 ⋮ 5.

4 ga bo'linish alomati: n soni 4 ga bo'linishi uchun n sonining o'nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamidan hosil bo'lgan ikki xonali sonning 4 ga bo'linishi zarur va yetarlidir. Masalan, 32364 ⋮ 4, chunki 64 ⋮ 4.

25 ga bo'linish alomati: n soni 25 ga bo'linishi uchun n sonining o'nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamidan hosil bo'lgan ikki xonali sonning 25 ga bo'linishi zarur va yetarlidir. (yoki sonning oxirgi ikkita raqamidan tuzilgan son 00, 25, 50, 75 ko'rinishida bo'lishi zarur va yetarlidir) Masalan, 2625 ⋮ 25;   150300 ⋮ 25;   3275 ⋮ 25;   36550 ⋮ 25.

3 ga bo'linish alomati: n soni 3 ga bo'linishi uchun bu sonning o'nli yozuvdagi raqamlar yig'indisi 3 ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

9 ga bo'linish alomati: n soni 9 ga bo'linishi uchun bu sonning o'nli yozuvdagi raqamlar yig'indisi 9 ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

Masalan, 12363 ⋮ 3, chunki (1+2+3+6+3) ⋮ 3, ammo 12363   9 soniga bo'linmaydi, chunki sonning raqamlar yig'indisi 9 ga bo'linmaydi.

11 ga bo'linish alomati: agar n sonining juft o'rinda turgan raqamlari yig'indisi bilan toq o'rinda turgan raqamlari yig'indilarining ayirmasi 11 ga bo'linsa, bu son 11 ga bo'linadi.

6 ga bo'linish alomati: n soni 6 ga bo'linishi uchun u 2 ga ham, 3 ga ham bo'linishi zarur va yetarlidir.

12 ga bo'linish alomati: n soni 12 ga bo'lishi uchun u 3 ga ham, 4 ga ham bo'linishi zarur va yetarlidir.

15 ga bo'linish alomati: n soni 15 ga bo'lishi uchun u 3 ga ham, 5 ga ham bo'linishi zarur va yetarlidir.

Teorema: Natural son murakkab a=b·c ga bo'lishi uchun u son b ga ham, c ga ham bo'linishi zarur va yetarlidir, bunda b va c sonlar o'zaro tub sonlar.

Nazorat uchun savollar:

1. Nomanfiy butun sonlar **ko'payt**masi ta'rifini ayting.
2. Nomanfiy butun sonlar **ko'payt**masining mavjudligi va yagonaligini asoslang.
3. *Nomanfiy butun sonlar* **ko'payt***masining xossalari*ni ayting va asoslang.