22-amaliy mashg‘ulot: Nomanfiy butun sonlar to‘plamining xossalari. Natural sonlar qatori kesmasi va chekli to‘plam elementlari soni tushunchasi. Tartib va sanoq natural sonlari.

Amaliy mashg‘ulotining rejasi:

1. **Nomanfiy butun sonlar to‘plamining xossalari.**
2. **Natural sonlar qatori kesmasi va chekli to‘plam elementlari soni tushunchasi.**
3. **Tartib va sanoq natural sonlari.**

1. Nomanfiy butun sonlar to‘plamining xossalari. Yuqorida aytilgan fikrlarni umumlashtirib, nomanfiy butun sonlar to‘plamining xossalarini sanab o‘tish mumkin:

1. Nomanfiy butun sonlar to‘plamida eng kichik element mavjud va u 0 ga teng. Bu esa to‘plamning quyidan chegaralanganligini bildiradi.

2. Nomanfiy butun sonlar to‘plami cheksiz va yuqoridan chegaralanmagan.

3. Nomanfiy butun sonlar to‘plami diskret.

Diskretlik nomanfiy butun sonlar to‘plamida har bir natural sondan keyin va oldin keladigan sonlarni ko‘rsatish mumkinligi bilan izohlanadi. Faqat 0hech qanday sondan keyin kelmaydi. Boshqacha aytganda, ikkita ixtiyoriy nomanfiy butun son orasida chekli sondagi nomanfiy sonlar joylashgan.

4. Nomanfiy butun sonlar to‘plami «<» munosabati orqali tartiblangan. (Bu xossalar izohi tegishli bo‘limlarda qaralgan edi.)

N natural sonlar to‘plamiga tartib munosabatini kiritamiz. Bunda biz birinchi va to‘rtinchi aksiomalarga va elementlar yig‘indisi tushunchalariga asoslanamiz.

«*a* natural son *b* natural sondan kichik» ta’rifini keltirib chiqarishda chekli to‘plamlarga bog‘liqlikdan foydalanamiz.

Bizga ma’lumki, chekli *A* to‘plam bilan bo‘sh bo‘lmagan chekli *B* to‘plam birlashmasi $C=A\cup B$ ($A\cap B=\varnothing$) *A* to‘plamdagidan ko‘p elementlarga ega bo‘ladi. Bu esa quyidagi ta’rifga olib keladi:

Ta’rif. Agar *a* va *b* natural sonlari uchun shunday bir *c* natural soni mavjud bo‘lib, $a+c=b$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, *a* natural soni *b* natural sonidan kichik deyiladi va $a<b$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, 5 <7 bu holda shunday natural son 2 mavjudki, 2+5=7 bo‘ladi.

$a<b$ munosabatdan foydalanib, 4- aksiomani quyidagicha ifodalash mumkin:

4^1-aksioma. N natural sonlarning bo‘sh bo‘lmagan *A* to‘plam ostida eng kichik son bor, ya’ni shunday sonni *a* desak, *A* to‘plamdagi *a* dan farqli barcha *x* sonlari uchun $a<x$.

Endi < munosabatini *N* to‘plamda qattiq tartib munosabati ekanini ko‘rsatamiz, ya’ni bu munosabat tranzitiv va antisimmetrik. Aytaylik, $a<b$ va $b<c$ bo‘lsin. Ta’rifga asosan shunday *k* va *l* sonlari topiladiki $b=a+k$, $c=b+l$ bo‘ladi. U holda $c=(a+k)+l$.

2- aksiomaga asosan $c=a+(k+l)$, $k+l$ natural son bo‘lgani uchun tenglikdan $a<c$. Demak, $a<b$ va $b<c$ dan $a<c$ kelib chiqadi. Bu esa < munosabati tranzitiv ekanligini ko‘rsatadi.

$<$ munosabati asimmetrik ekanligi 4- aksiomadan ko‘rinadi. Bu aksiomaga asosan natural sonlar to‘plamining bo‘sh bo‘lmagan A to‘plamida eng kamida bitta eng kichik element a bor. A da bu element bir qiymatli aniqlangan va bundan boshqa eng kichik element yo‘q ekanligini ko‘rsatamiz. Aytaylik a dan boshqa eng kichik b element bor bo‘lsin, u holda $a<b$ va $b<a$ bajariladi. Bunday bo‘lishi esa mumkin emas. Shunday qilib $<$ munosabati N to‘plamda qattiq tartib munosabati ekan. Bu tartibning chiziqli ekanini ko‘rsatamiz, ya’ni ixtiyoriy ikkita turli xil a va b natural sonlar uchun $a<b$ va $b<a$ munosabatlardan biri bajariladi. Haqiqatan ham ikkita elementdan tashkil topgan A=$\{a; b\}$ to‘plamni olaylik.

4^1- aksiomaga asosan bu to‘plamda eng kichik element bo‘lishi kerak. Agar bu element a bo‘lsa, $a < b$, agar bu element b bo‘lsa, $b< a$ munosabat o‘rinli.

Endi natural sonlarni qo‘shish monotonlik xossasiga ega ekanligini ko‘rsatamiz.

Agar $a<b$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $c\in$ N uchun $a+c <b+c$ ga ega bo‘lamiz

(tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil soni qo‘shsak, tengsizlik belgisi o‘zgarmaydi). Aslida ta’rifga ko‘ra $a<b$ deganda shunday bir k sonni mavjud bo‘lib $b=a+k$ ekanini bildiradi. Lekin $b+c=(a+k)+c$. birinchi va ikkinchi aksiomalarga ko‘ra $b+c =(a+k)+c=a+(k+c) = a+(c+k)=(a+c)+k$.

Demak, $b+c=(a+c)+k$. Bu esa $a+c < b+c$ ekanini bildiradi.

Endi natural sonlarni qo‘shish qisqaruvchanligini ko‘rsatamiz, ya’ni $a+c= b+c$ bo‘lsa, u holda $a=b$ ga teng. Aslida quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin: $a<b$, $b<a$, $a=b$; Ammo$a<b$ bo‘lsa, u holda $a+c < b+c$ bo‘ladi, biz esa $a+c=b+c$ deb oldik. Demak $a<b$ hol mumkin emas. Shu sababli $b<a$ hol ham mumkin emas, faqat $a=b$ bo‘lgan hol qoladi.

Natural sonlar to‘plamining cheklanmaganligi va diskretligi.

4^1 - aksiomaga ko‘ra N natural sonlar to‘plamida eng kichik son mavjud. Bu son 1 bilan belgilanadi va birlik deb ataladi. N natural sonlar to‘plamida eng kichik son bo‘lgani uchun, ixtiyoriy $a\in N$, son uchun $a\neq 1$ va $1<a$ bajariladi. Bu deganimiz $a=1+b$, bu yerda $b\in N$ natural sonlar to‘plamida eng katta son mavjud emas, haqiqatan ham ixtiyoriy $a\in N$ uchun $a<a+1$, demak aN to‘plam uchun eng katta son bo‘la olmaydi. Shunga ko‘ra N natural sonlar to‘plami quyidan 1 soni bilan chegaralanib, yuqoridan esa chegaralanmagan deb aytiladi.

Barcha sonlar o‘rtasida a sonidan keyin keluvchi eng kichik $a+1$ son bor. Haqiqatan ham a sonidan keyin b soni kelsin desak, u holda shunday c natural soni topiladiki $b=a+c$.

Ammo$1\leq c$ bo‘lganidan $a+1\leq a+c$ ga ega bo‘lamiz, bundan esa $a+1\leq b$. Bu esa $a+1$ soni a sonidan keyin keluvchi eng kichik son ekanligini ko‘rsatadi.

Bundan keyin a sonidan keyin keluvchi eng kichik songa, a sonidan bevosita keyin keluvchi son deyiladi. Shunday qilib, N natural sonlar to‘plamidagi har bir elementdan bevosita keyin keluvchi element mavjud.

Bu xossa natural sonlar to‘plamining diskretligi deyiladi. «b soni a sonidan bevosita keyin keladi» munosabatiga «a soni b sonidan bevosita oldin keladi» munosabati teskari hisoblanadi. Boshqacha aytganda, a soni b sonidan bevosita oldin keladi» munosabati faqat va faqat $b=a+1$ bo‘lganda o‘rinli. 1 sonidan oldin keluvchi son yo‘q, chunki birinchi va uchinchi aksiomalarga ko‘ra $1=a+1$

bajarilmaydi. 1 dan boshqa barcha natural sonlar uchun uning oldidan keluvchi faqat bitta va bitta natural son mavjudligini ham ko‘rsatish mumkin. Haqiqatan ham $b \neq 1$ bo‘lsa, u holda $1 < b$ (1-eng kichik natural son), bundan esa shunday $a \in N$ natural soni mavjud bo‘lib, $b=1+a=a+1$ ekani ko‘rinadi. Demak, *b* natural soni *a* dan keyin kelar ekan, ya’ni *b* natural soni *a* dan bevosita keyin keladi. Endi *b* dan boshqa *a* dan bevosita keyin keluvchi natural son yo‘qligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $c \neq a$, *c* *b* dan bevosita keyin keluvchi son bo‘lsin. U holda $b= a+1$; $b=c+1$ bo‘ladi, bundan $a+1=c+1$;

Qo‘shishning qisqaruvchanlik xossasiga asosan $a=c$, bu esa farazimizga qarama-qarshi. Demak, *b* son *a* sonidan bevosita keyin keluvchi yagona son ekan.

2.Tartib va sanoq natural sonlar. Shuni xulosa qilib aytish kerakki, natural sonlar nafaqat miqdorlarni oichash va to‘plam elementlarini sanash uchun ishlatiladi, balki to‘plam elementlarini tartiblash ham natural sonlar yordamida amalga oshiriladi. Bunda chekli to‘plam uchun natural sonlar qatori kesmasi tushunchasi ishlatiladi.

Ta’rif. Natural sonlar qatorining N_a **kesmasi** deb, a natural sondan katta bo‘lmagan barcha natural sonlar to‘plamiga aytiladi.

Masalan, $N_5 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Ta’rif. A to ‘plam elementlarini **sanash** deb, A to ‘plam bilan natural sonlar qatorining N_a kesmasi orasidagi o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilishiga aytiladi.

a soni *A* to‘plam elementlari sonini bildiradi va $n(A) = a$ deb yoziladi. To‘plam elementlarini sanash faqat ularning miqdorini aniqlab qolmay, balki to‘plam elementlarini tartiblaydi ham. Bunda har bir elementning sanoqda «nechanchi» ekanligini ham aytish mumkin bo‘ladi. Elementning nechanchi bo‘lishi sanashning olib borilishiga bog‘liq. Kombinatorikada ko‘rilganidek, *a* ta elementli to‘plam *tartiblanishlari umumiy soni* $a!$ ga teng bo‘lgani uchun bu turli usullar bilan sanalganda element tartib nomeri $a!$ marta o‘zgarishi mumkin degani. Lekin qanday usul bilan sanalmasin, to‘plam elementlari soni o‘zgarmasdir. Demak, «nechta» savoliga javob beruvchi natural sonlar *miqdoriy*, «nechanchi» savoliga javob beruvchi natural sonlar *tartib natural sonlar* deyiladi. To‘plam oxirgi elementining tartib nomeri bir vaqtda to‘plam elementlari sonini bildiradi. Demak, sanoq 19- elementida tugasa, to‘plamda 19 ta element bor degan xulosa chiqariladi.

Nazorat uchun savollar

1. 569•371 + 170•569 + 569•459 = 569•371 + 569•170 + 569•459 = 569•(371 + 170 + 459) = 569•[(371 + 459) + 170] = 569 • (830 + 170) = 569 • 1000 = 569000 ni hisoblashda qo‘shish va ko‘paytirishning qanday qonunlaridan foydalanilganini ko‘rsating.
2. 32 + 46 = (30 + 2) + (40 + 6) = (30 + 40) + (2 + 6) = 70 + 8 = 78 ning yechilishini tushuntiring.
3. 23 • 4 = (20 + 3) • 4 = 20 • 4 + 3 • 4 = 80 + 12 = 92 ning yechilishini tushuntiring.