20-amaliy mashg‘ulot: Nomanfiy butun sonlarni qo‘shish amalining aksiomatik ta’rifi. Qo‘shish va ko’paytirish qonunlari.

Amaliy mashg‘ulotining rejasi:

1. **Natural sonlarni qo‘shish va uning xossalari.**
2. **Qo‘shishjadvalini tuzish**

Natural sonlarni qo‘shish va uning xossalari. Qo‘shish amalining ta’rifi German Grossman (1809—1877) tomonidan berilgan qo‘shish amalining induktivlik ta’rifiga asoslanadi. Bu ta’rif ikki qismdan iborat bo‘lib, quyidagicha:

1) ixtiyoriy a natural songa 1 ni qo‘shish, bevosita a dan keyin keladigan sonni beradi. Ya’ni $(\forall a \in N)$ $(a + 1 = a')$.

2) a + b’ amali, a songa bevosita b sondan keyin keladigan b’ sonni qo‘shish natijasida a + b sondan bevosita keyin keladigan natural $(a + b)'$ sonni beradi. Ya’ni$(\forall a, b \in N)[(a + b)' = = (a + b) + 1]$.

Peanoning ikkinchi aksiomasidan ma’lumki, n — natural son bo‘lsa, $n + 1$ ham albatta natural son bo‘ladi. Bunda a va $a + b$ lar natural son bo‘lganda $a + b' = (a + b)'$ ham natural son bo‘lishi kelib chiqadi. Shuningdek, $a + 1 = a'$ dan Peanoningaksiomasiga asosan a natural son bilan b natural sonning yig‘indisi toia aniqlangan va natural sondan iborat bo‘ladi.

Demak, qo‘shish amali natural sonlar to‘plamida hamma vaqt bajariladigan bir qiymatli amal ekan.

Natural sonlarni qo‘shish ta’rifidan ko‘rinadiki, har qanday natural son o‘zidan oldingi natural son bilan birning yig‘indisiga teng bo‘lar ekan.

Ya’ni $2 = 1 + 1,$ $6 = 5 + 1,$

$3 = 2 + 1,$ $7 = 6 + 1,$

$4 = 3 + 1,$ $8 = 7 + 1,$

$5 = 4 + 1,$ $9 = 8 + 1$

bo‘ladi. Natijada biz 1 ni qo‘shish jadvalini hosil qildik. Endi 2 ni qo‘shish jadvalini tuzaylik:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Demak, 2 ni qo‘shish jadvali:

$$1 + 2 = 1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 = 2 + 1 = 3,$$
$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4,$$
$$3 + 2 = 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5,$$
$$4 + 2 = 4 + (1 + 1) + (4 + 1) + 1 = 5 + 1 = 6.$$

3 ni qo‘shish jadvalini tuzsak:

$$1 + 3 = 1 + (2 + 1) = (1 + 2) + 1 = 3 + 1 = 4,$$
$$2 + 3 = 2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$2 + 4 = 2 + (3 + 1) = (2 + 3) + 1 = 5 + 1 = 6.$$

Xuddi shu yo‘l bilan bir xonali sonlarni qo‘shish jadvalini tuzishimiz mumkin. Yuqoridagilardan ko‘rinadiki, agar natural sonlar qatorida a dan bevosita keyin keladigan b ta sonni sanasak, natijada oxiri sanalgan son a va b sonlarning yig‘indisi bo‘ladi va u $a + b$ ko‘rinishda belgilanadi. Bunda a — *birinchi qo‘shiluvchi*, b — *ikkinchi qo‘shiluvchi*, $a + b$ esa *yig‘indi* deb yuritiladi.

Qo‘shish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Guruhlash (assotsiativlik) xossasi.

$$(\forall a, b, c \in N)[(a + b + c) = a + (b + c)].$$

Bu xossani matematik induksiya metodi yordamida isbotlaylik. Isbot. 1) $c = 1$ bo‘lsin. U holda $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ (ta’rifga asosan).

Demak, c = 1 uchun guruhlash xossasi o‘rinli.

2) $c = n$ uchun $(a + b) + n = a + (b + n)$ o‘rinli deb faraz qilaylik.

3) c = $n + 1$ uchun bu xossaning to‘g‘riligini isbotlaylik.

$(a + b) + (n + 1) = [(a + b) + n] + 1 =$ *(ta’rifga asosan).*

$= [a + (b + n)] + 1 =$ (farazga asosan)

$= a + [(b + n) + 1] =$ (ta’rifga asosan)

$a = [b + (n + 1)]$ (ta’rifga asosan).

Demak, $(a + b) + (n + 1) = a + [b + (n + 1)].$

Peanoning 4-aksiomasiga asosan, $(a + b) + c = a + (b + c)$ ekanligi kelib chiqadi.

2°. O‘rin almashtirish (kommutativlik) xossasi.

$$(\forall a, b \in N)\ (a + b = b + a).$$

Bu xossani ham matematik induksiya metodidan foydalangan holda isbotlaymiz.

Isbot. 1) $a=1$ bo‘lsa, $1 + b = b + 1$ bo‘lishini isbotlaylik. $b = 1$ bo‘lsa, $1 + 1 = 1 + 1$ bo‘ladi. Demak, $b = 1$ uchun $1 + b = b + 1$ tenglik to‘g‘ri.

$b = n$ uchun $1 + n = n + 1$ to‘g‘ri deb faraz qilaylik. $b = n + 1$ uchun $1 + (n + 1) = (n + 1) + 1$ to‘g‘riligini isbotlaymiz.

$1 + (n + 1) = (1 + n) + 1 =$ (ta’rifga asosan)

$= (n + 1) + 1$ (farazga asosan).

Demak, $1 + (n + 1) = (n + 1) + 1$ bo‘ladi.

Endi yuqoridagi xossa $\forall a \in N$ uchun o‘rinli ekanligini isbotlaylik.

$a = 1$ uchun o‘rinli ekanligini ko‘rdik. $a = m$ uchun $m + b = b + m$ deb faraz qilaylik.

$a = m + 1$ uchun $(m + 1) + b = b + (m + 1)$ ekanligini isbotlaylik. U holda $(m + 1) + b = m + (1 + b) = m + (b + 1) =$ *(l°-xossaga asosan)*

$= (m + b) + 1 =$ (ta’rifga asosan)

$= (b + m) + 1 = b + (m + 1)$ (farazga asosan).

Demak, $a + b = b + a$ (4-aksiomaga asosan).

Nazorat uchun savollar

1. Natural sonlarni qo‘shish ta’rifini ayting.
2. Natural sonlarni qo‘shish xossalarini ayting va asoslang.
3. $32 + 46 = (30 + 2) + (40 + 6) =(30 + 40) + (2 + 6) = 70+8 = 78$ ning yechilishini tushuntiring.