

## 2-mavzu. To'plamlar ustida amallar

**Ma'ruza mashg'ulotining rejasi:**

1. To'plamlarning kesishmasi va uning xossalari.
2. To'plamlarning birlashmasi va uning xossalari.

**Ma'ruza matni:**

### 1. To'plamlarning kesishmasi

**Ta'rif.**  $a, b, s, d, \dots$  elementlar  $A$  va  $B$  to'plamlarning har birida mavjud bo'lsa, ular bu to'plamlarning umumiy elementlari deyiladi. Masalan:  $A = \{a, b, s, d, e, f\}$ ,  $B = \{a, b, d\}$  to'plamlar uchun  $a, b, d$  – umumiy elementlar.

**Ta'rif.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning hamma umumiy elementlaridagina tuzilgan  $C$  to'plam  $A$  va  $B$  to'plamlarning kesishmasi (ko'paytmasi) deyiladi va quyidagicha belgilanadi  $C = A * B$  yoki  $C = A \cap B$  bu yerda  $\cap$  belgi to'plamlarning kesishmasini bildiradi.

Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan to'plamlarning kesishmasi  $\emptyset$  bo'sh to'plamga teng.

Masalan,

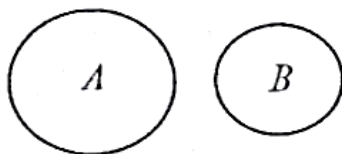
1.  $A = \{a, b, s, d, e\}$  va  $B = \{a, s, d, e, f\}$  to'plamlar uchun:  $A \cap B = \{a, s, d, e\}$  ga teng.

2.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{5, 6, 7, 8\}$  va  $C = \{5, 6, 9, 10, 11\}$  to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng:  $A \cap B \cap C = \{5, 6\}$

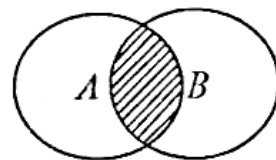
3.  $A = \{2, 3, 4\}$  va  $B = \{7, 8, 9\}$  to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng:  $A \cap B = \emptyset$

To'plamlarning kesishmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning kesishmasiga mos keladi. Quyida har bir hol uchun to'plamlar kesishmasi shtrixlab ko'rsatilgan (I.3-rasm):

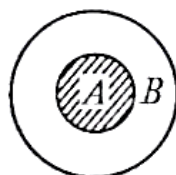
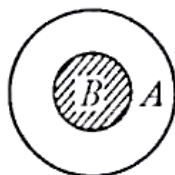
I.  $A \cap B = \emptyset$



II.  $A \cap B \neq \emptyset$



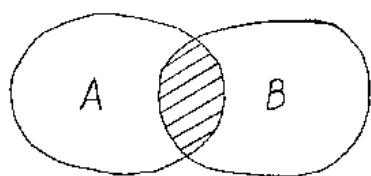
III. a)  $A \cap B = B$       b)  $A \cap B = A$



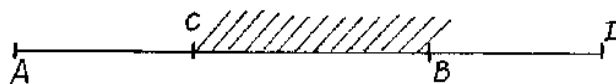
IV.  $A \cap B = A = B$



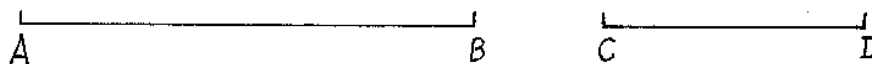
I.3-rasm.



2-chizma



3-chizma



4-chizma

2-chizmada shtrixlangan qism  $A$  va  $B$  to'plamlar kesishmasini, 3-chizmada  $[CB]$  kesma  $[AB]$  va  $[CD]$  kesmalar kesishmasini ifodalaydi.

4-chizmada  $[AB]$  va  $[CD]$  kesmalar kesishmaydi, demak kesishma bo'sh to'plam.<sup>1</sup>

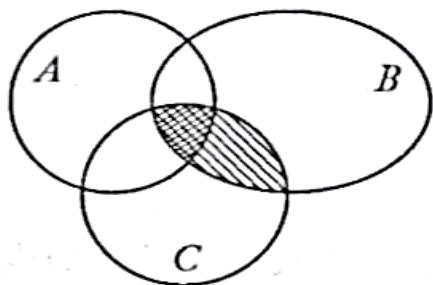
To'plamlar kesishmasi uchun quyidagilar o'rinli:

1°.  $B \subset A$  bo'lsa,  $A \cap B = B$  bo'ladi. Bu xossa to'plamlar kesishmasi ta'rifidan kelib chiqadi.

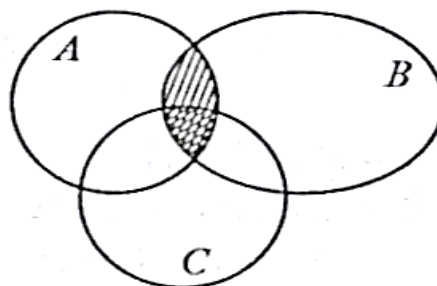
2°.  $A \cap B = B \cap A$  (kommutativlik xossasi).

3°.  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$  (assotsiativlik xossasi). Assotsiativlik xossasi  $A \cap (B \cap C)$  kesishmani qavslarsiz yozishga imkon beradi va istalgan sondagi to'plamlar kesishmasini topishda qulaylik tug'diradi. Bu xossani Eyler — Venn diagrammalarida quyidagicha tasvirlaymiz (I.4-rasm):

1.4- a) rasmda tenglikning chap qismi; I.4-b) rasmda tenglikning o'ng qismi tasvirlangan, ikki marta shtrixlangan sohalar ikkala rasmda ham bir xil bo'lgani uchun  $(A \cap B) \cap C$  va  $A \cap (B \cap C)$  to'plamlar teng degan xulosaga kelamiz.



a)



b)

I.4-rasm.

<sup>1</sup>Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики. Учебное пособие. Москва. «Академия». 2014 272 с. 63-76 betlar mazmuni olingan

$$4^\circ. A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$5^\circ. A \cap A = A.$$

Yuqoridagi xulosalar to'plamlar soni ikkitadan ortiq bo'lgan hol uchun ham to'g'ri.

**2. To'plam birlashmasi (yig'indisi)** Berilgan  $A$  va  $B$  to'plamlarning birlashmasi (yig'indisi) deb shu  $A$  va  $B$  to'plamlarning har biridagi barcha elementlardan tuzilgan  $C$  to'plamga aytamiz. Birlashma  $C = A + B$  yoki  $C = A \cup B$  ko'rinishda belgilanadi.

To'plamlar birlashmasida har bir element bir martagina olinishi lozim bo'lgani uchun, to'plamlardan har ikkalasining umumiy elementlari  $C$  yig'indida bir martagina olinadi.

**Misollar:**

1.  $A = \{a, b, s, d\}$ ,  $B = \{a, b, s, d, e, f\}$  to'plamlarning birlashmasi:

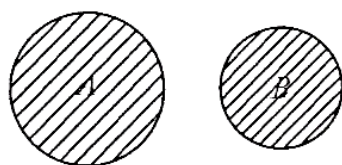
$$A \cup B = \{a, b, s, d, e, f\} \text{ ga teng}$$

2.  $A = \{3, 4, 5, 6\}$  va  $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$  to'plamlar uchun  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  ga teng.

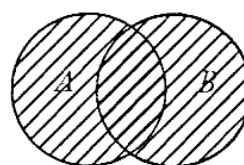
To'plamlarning birlashmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to'plamni bildiradi.

Quyidagi chizmalarda shtrixlangan yuza  $A$  va  $B$  to'plamlarning birlashmasini bildiradi.

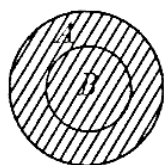
I.  $A \cup B$



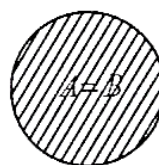
II.  $A \cup B$



III.  $A \cup B$



IV.  $A = B$



I.5-rasm.

*To'plamlar birlashmasining xossalari:*

$$1^\circ. B \subset A \Rightarrow A \cup B = A.$$

$$2^\circ. A \cup B = B \cup A \text{ (kommutativlik xossasi).}$$

$$3^\circ. A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \text{ (assotsiativlik xossasi).}$$

$$4^\circ. A \cup \emptyset = A.$$

$$5^\circ. A \cup A = A.$$

6°.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasi).

Teorema. Agar  $A$ ,  $B$  va  $C$  universal  $U$  to'planning qism to'plami bo'lsa, ular ikkita distributivlik qonuniga ega.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \text{ va } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Isbot:

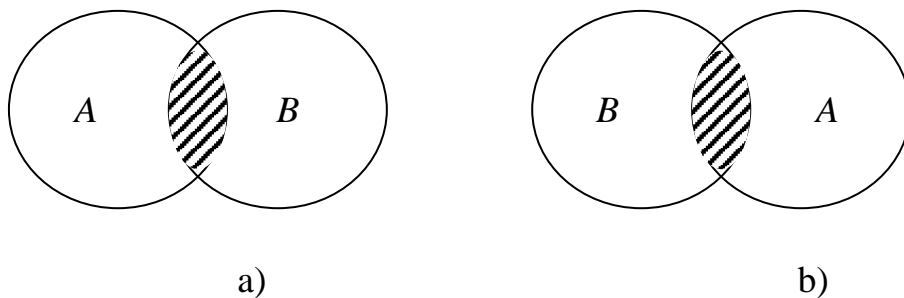
$x \in A \cap (B \cup C)$  bo'lsin, bundan  $x \in A$  va  $x \in B \cup C$  ekani kelib chiqadi. Bundan  $x \in A$  va  $x \in B$  yoki  $x \in A$  va  $x \in C$ , bu esa  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$  ekanligini bildiradi, shunday ekanligini isbot qiladi:  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Aksincha, agar  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , u holda  $x \in A \cap B$  yoki  $x \in A \cap C$ . Bu holda  $x \in A$ , lekin xuddi shunday  $x \in B \cup C$ ,  $x \in A \cap (B \cup C)$  ekanligini bildiradi,  $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$  isbotlaydi. Bundan kelib chiqadiki  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Distributivlikning ikkinchi qonunini ham talabalar xuddi shunday isbot qilishlari mumkin.<sup>2</sup>

7°.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivlik xossasi).

To'plamlar soni ikkitudan ortiq bo'lganda ham yig'indi uchun chiqarilgan xulosalar to'g'ri bo'ladi.

Kommutativlik va kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossalarning to'g'riligini ko'rsatamiz

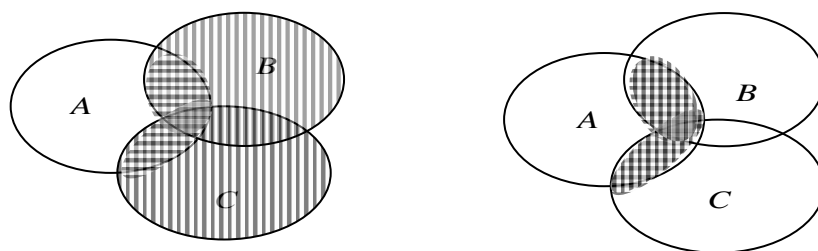
1)  $A \cap B = B \cap A$  (kommutativlik xossasi)



8.2 – chizma

8.2- a) b) chizmalardagi shtrixlangan sohalar bir xil bo'lgani uchun  $A \cap B = B \cap A$  kesishmalar teng.

2)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasi)



<sup>2</sup>David Surovski Advanced High-School Mathematics. 2011. 425s., 193 betlarmazmuniolingan

8.3 – chizma

8.3-chizmada tenglikning chap qismi  $(B \cup C)$  birlashma vertikal va  $A \cap (B \cup C)$  garizantal shtrixlangan.

8.4 – chizma

8.4-chizmada  $A \cap B$  va  $A \cap C$  kesishma gorizantal shtrixlangan.  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  esa vertikal shtrixlangan. 8.3 va 8.4 chizmalardagi ikki marta shtrixlangan sohalar bir xil bo'lganligidan  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  tenglikning to'g'riligi ko'rinadi.

### Nazorat uchun savollar

1. To'plamlarning kesishmasi, birlashmasiga ta'rif bering.
2. To'plamlarning kesishmasi, birlashmasiga misollar keltiring.
3. Misollarni Eyler-Venn diagrammasida tasvirlang.

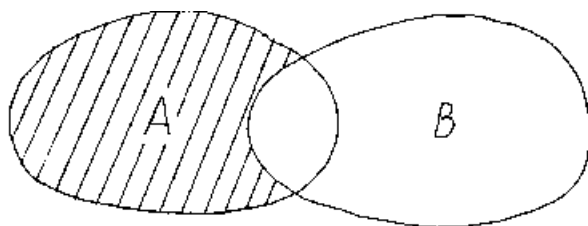
### 4-mavzu. To'plamlar ustida amallar

Ma'ruza mashg'ulotining rejasi:

1. Ikki to'plamning ayirmasi va uning xossalari.
2. Universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam va uning xossalari.
3. To'plamlarning dekart ko'paytmasi

**1.To'plamlar ayirmasi.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning ayirmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u  $A$  ning  $B$  da mavjud bo'lmagan hamma elementlaridangina tuziladi va quyidagicha belgilanadi:

$$C = A - B \text{ yoki } C = A \setminus B^3$$



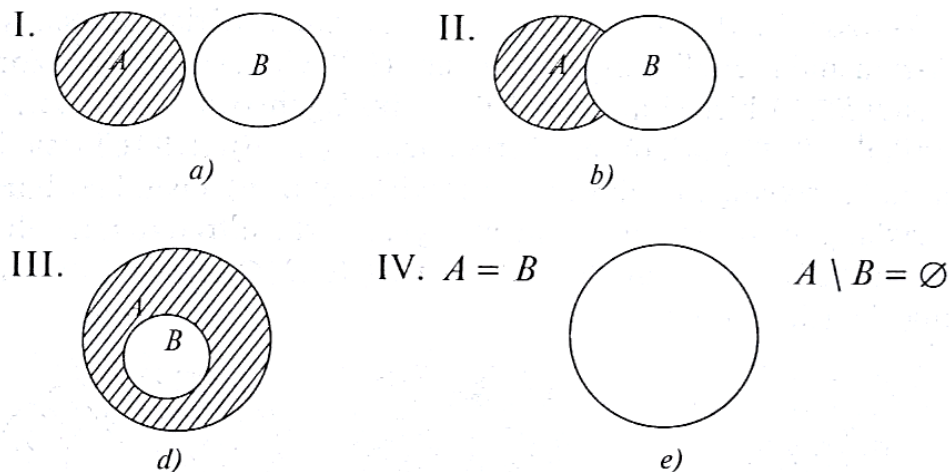
**Misollar:**

1.  $A = \{1,2,3,4\}$  va  $B = \{3,4,5,6,7,8\}$  uchun  $R = A \setminus B = \{1,2\}$
2.  $A = \{1,2,3,4,5\}$  va  $B = \{6,7,8\}$  uchun  $R = A \setminus B = \{1,2,3,4,5\}$
3.  $A = \{1,2,3\}$  va  $B = \{1,2,3,4,5\}$  uchun  $R = A \setminus B = \emptyset$

To'plamlarning ayirmasi geometrik nuqtai nazardan yuqoridagi 7-chizmada ko'rsatilgan shtrixlangan yuzani bildiradi.

---

<sup>3</sup>Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики. Учебное пособие. Москва. «Академия». 2014 272 с. 63-84 betlar mazmuni olingan



I.7-rasm.

**$A$  va  $B$  to'plamlarning ayirmasi deb,  $A$  to'plamning  $B$  to'plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va  $A \setminus B$  yoki  $A - B$**

Ko'rinishlarda belgilanadi.  $A$  va  $B$  to'plamlarning ayirmasini mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A - B = A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ava  $B$  to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan  $A \cup B$  to'plam  $A$  va  $B$  to'plamlarning birlashmasi yoki yig'indisi deyiladi. Buni matematik tilda quyidagicha yozamiz<sup>4</sup>

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Masalan:  $\{1, x, a\} \cup \{2, 7, x\} = \{1, x, a, 2, 7\}$

**2. Universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam va uning xossalari.**  $A$  to'plam va uning  $B$  qismi berilgan bo'lsin.  $A$  dagi  $B$  ga kirmay qolgan hamma elementlardagina tuzilgan qism,  $B$  ning to'ldiruvchisi deb ataladi va  $\bar{B}$  ko'rinishda belgilanadi. Bunda  $\bar{B}$  qism to'plam  $B$  ni  $A$  gacha to'ldiradi, ya'ni  $B$  va  $\bar{B}$  ning birlashmasi xuddi  $A$  ga teng bo'ladi.

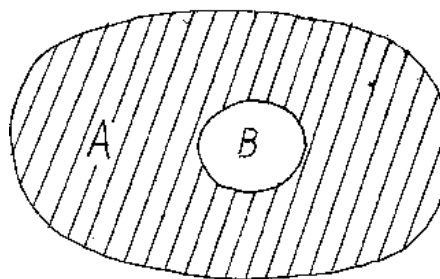
Masalan,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  va  $B = \{2, 5, 6, 9\}$  bo'lsa,  $\bar{B} = \{1, 3, 4, 7, 8\}$  bo'ladi.

Agar  $A$  to'plam biror boshqa to'plamning qismi deb qaralmasa, u holda  $A$  to'plamning to'ldiruvchisi  $\emptyset$  bo'sh to'plam bo'lib,  $\emptyset$  ning to'ldiruvchisi esa  $A$  bo'ladi, ya'ni:  $\overline{\emptyset} = A$  va  $\overline{A} = \emptyset$ .

Agar  $A \supset B$  bo'lsa, u holda  $A \setminus B$  ayirma,  $B$  to'plamni  $B$  to'plamga to'ldiruvchisi deyiladi.

Bu 4-chizmada quyidagicha ifodalanadi.

<sup>4</sup>Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists, p.p11-12,14-15 betlar mazmuni olingan



4-chizma

**1-Eslatma.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning aqalli bittasida ikkinchisiga kirmaydigan elementlar mavjud bo'lsa,  $A$  va  $B$  ni tengmas to'plamlar deymiz, uni quyidagicha belgilaymiz:  $A \neq B$

To'plamlar ayirmasining xossalari va tasviri (I.7-rasm):

1°.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A$  (I.7-a rasm).

2°.  $B \subset A \Rightarrow A \setminus B = B'_A$  (I.7-d rasm).

3°.  $A = B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$  (I.7-e rasm).

4°.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus B \setminus C$ .

5°.  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

6°.  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ .

7°.  $(A \cap B)' = A' \cup B'$ .

6- va 7-xossalar *De-Morgan qonunlari* deyiladi.

4- va 5-xossalarning o'rinli ekanligiga Eyler — Venn diagrammalarida tasvirlash orqali ishonch hosil qilish mumkin.

6-xossani quyidagicha isbotlaymiz.  $x \in (A \cap B)'$  bo'lsin. Bundan  $x \notin A \cap B$  ekani kelib chiqadi. Kesishma ta'rifiga ko'ra  $x \notin A$  yoki  $x \notin B$  degan xulosaga kelamiz, bundan esa  $x \in A'$  yoki  $x \in B'$  ekani kelib chiqadi.  $x \in A'$  yoki  $x \in B'$  bo'lsa, birlashma ta'rifiga ko'ra  $x \in A' \cup B'$  bo'ladi. Ikkinchi tomondan  $x \in A' \cup B'$  bo'lsin. U holda birlashma ta'rifiga ko'ra  $x \in A'$  yoki  $x \in B'$  ekani kelib chiqadi,  $x \in A'$  ekanidan  $x \notin A$  va  $x \in B'$  ekanidan  $x \notin B$  degan xulosaga kelamiz,  $x \notin A$  va  $x \notin B$  bo'lsa,  $x \notin A \cap B$  bo'ladi, bu esa  $x \in (A \cap B)'$  ekanligini ko'rsatadi. Demak,  $(A \cap B)'$  va  $A' \cup B'$  to'plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan va shuning uchun ham teng ekan<sup>5</sup>.

7°-xossa ham xuddi shunday isbotlanadi.

Ishonchim komilki, siz bu tushunchalarga qo'shilasiz. Yana ikkita muhim konstruktsiya bu ayirma va to'ldiruvchidir.

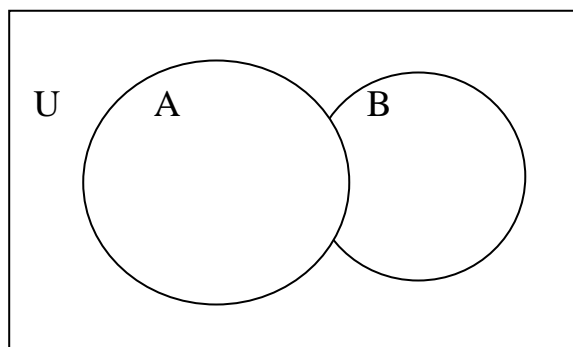
$$A - B = \{u \in U \mid u \in A \text{ lekin } u \notin B\} \text{ va}$$

$$A' = \{u \in U \mid u \notin A\} = U - A.$$

Qism to'plamiga tegishli munosabatlar va amallar odatda shartli ravishda tanish Venn diagrammasi orqali ifodalanadi. Misol uchun, quyidagi Venn diagrammasida talaba  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ ,  $A'$  (yoki xayolga kelishi mumkin

<sup>5</sup>David Surovski Advanced High-School Mathematics. 2011. 425s. 192 - betlarmazmuniolingan

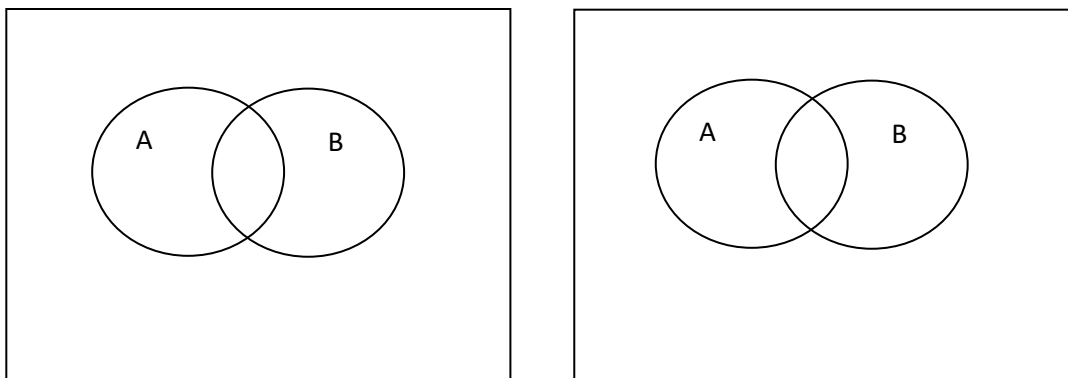
bo'lgan yana boshqalar) qism to'plamlarini shtrixlashda qiyinchilikka duch kelmasligi kerak.



Venn diagrammasi yuqoridagi amallarning xususiyatlarini aniqlashda qo'l kelishi mumkin. Shunday munosabat va ularning Venn diagrammasidagi isbotining bir namunasi De Morgan qonunlari hisoblanadi:  $U$  universal to'plamning  $A$  va  $B$  qism to'plamlari uchun quyidagi munosabat mavjud:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ va } (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Venn diagrammasini shtrixlash orqali bunga ishonch hosil qilishingiz mumkin:



Shunga qaramay De Morgan qonunlarining hayratlanarli tomoni yo'q. Agar  $A$  "Dushanba kuni yomg'ir yog'adi" va  $B$  "Seshanba kuni yomg'ir yog'adi" deb ifodalasa, u holda  $(A \cup B)'$  bilan ifodalangan "Dushanba yoki seshanba kuni yomg'ir yog'maydi" iborasi  $A' \cap B'$  orqali ifodalangan "Dushanba kuni yomg'ir yog'maydi va seshanba kuni yomg'ir yog'maydi" iborasi bilan bir xildir.

Ishonchliroq isbotni quyidagi qatorlarda uchratish mumkin. Buni  $S=T$  to'plamlari uchun isbotlashda  $S \subseteq T$  va  $T \subseteq S$  ekanligini isbotlash qo'l keladi.

**Teorema.** Berilgan  $U$  to'plamning  $A$  va  $B$  qism to'plamlari uchun  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ .

**Isbot.**  $x \in (A \cup B)'$  bo'lsin.  $U$  holda  $x \notin A \cup B$  ning ichiga kirmaydi, ya'ni  $x \notin A$  da ham,  $B$  da ham emas:  $x \in A' \cap B'$ . Bu  $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$  ligini isbotlaydi. Boshqa tomondan olganda, agar  $x \in$

$A' \cap B'$  bo'lsa, bunda  $x$   $A$  ga tegishli emas va  $x$   $B$  ga ham tegishli emas, shunday ekan  $x \in A \cup B$  ning ichiga kirmaydi. Lekin  $x \in (A \cup B)'$  ligini ko'rsatadi, bu  $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$  ekanligini isbotlaydi. Bundan ko'rinib turibdiki,  $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$  ligini ko'rsatadi.

Birlashma va kesishmalarga tegishli bo'lgan ikki muhim natijalar bor va ular De Morgan qonunlaridan ko'ra mavhumroqdir. Bu natijalarni teorema sifatida xulosalasak:

**Teorema:**  $A, B$  va  $C$  universal to'plam  $U$  ning qism to'plamlari bo'lsin.  $U$  holda bizda ikkita "distributiv qonunlar" mavjud.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \text{ va } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**Ta'rif.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning simmetrik ayirmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u  $A \setminus B$  yoki  $B \setminus A$  ayirmalarga tegishli bo'lgan hamma elementlaridagina tuziladi va quyidagicha belgilanadi:  $C = A \Delta B$ .

To'plamlarning simmetrik ayirmasi rasmda ko'rsatilgan shtrixlangan sohani bildiradi.

**To'plamlarning dekart (to'g'ri) ko'paytmasi.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u to'plam elementlari tartiblangan  $(x, y)$  juftliklardan iborat bo'lib, bu juftni birinchisi  $A$  to'plamdan, ikkinchisi esa  $B$  to'plamdan olinadi. To'g'ri ko'paytma  $A * B$  ko'rinishda belgilanadi.

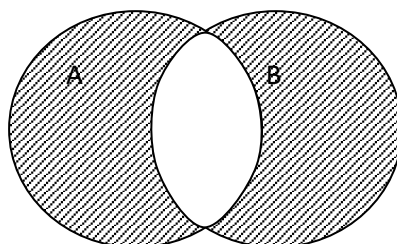
**Misol:**  $A = \{4, 5, 7\}$  va  $B = \{-1, 2, 3, 4\}$  to'plamlar berilgan bo'lsin.  $U$  holda  $A$  va  $B$  to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi quyidagicha bo'ladi:

$$A * B = \{(4; -1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (5; -1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (7; -1), (7; 2), (7; 3), (7; 4)\}$$

Agar biz to'g'ri ko'paytma elementi  $(x, y)$  dagi  $x$  ni biror nuqtani absissasi,  $y$  ni esa ordinatasi desak, u holda bu to'g'ri ko'paytma tekislikdagi nuqtalar to'plamini ifodalaydi.

Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to'plami  $R$  ni  $R$  ga to'g'ri ko'paytmasi  $R \times R$  ni tasvirlaydi.

**Ta'rif.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning dekart ko'paytmasi deb, 1-elementi  $A$  to'plamdan, 2-elementi  $B$  to'plamdan olingan  $(a; b)$  ko'rinishdagi barcha tartiblangan juftliklar to'plamiga aytiladi. Dekart ko'paytma  $A \times B$  ko'rinishda belgilanadi:  $A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ va } b \in B\}$ .<sup>6</sup>



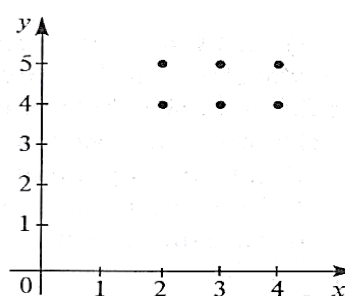
<sup>6</sup>Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики. Учебное пособие. Москва. «Академия». 2014 272 с. 88-95 betlar mazmuni olingan

$A \backslash a$	3	5
1	(1,3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,5)
3	(3,3)	(3,5)

Masalan:  $A = \{2; 3; 4; 5\}$ ,  $B = \{a; b; c\}$  bo'lsa,  $A \times B = \{(2; a), (2; b), (2; c), (3; a), (3; b), (3; c), (4; a), (4; b), (4; c), (5; a), (5; b), (5; c)\}$  bo'ladi.

Sonli to'plamlar dekart ko'paytmasini koordinata tekisligida tasvirlash qulay. Masalan,  $A = \{2; 3; 4\}$ ,  $B = \{4; 5\}$  bo'lsin, u holda  $A \times B = \{(2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5), (4; 4), (4; 5)\}$  bo'ladi.

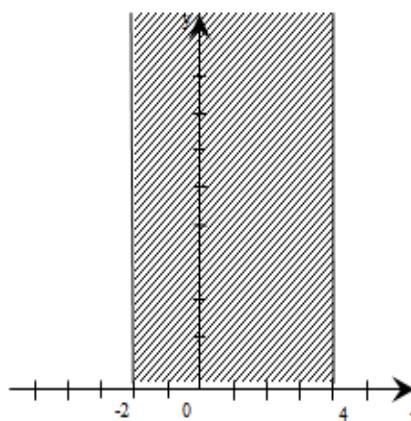
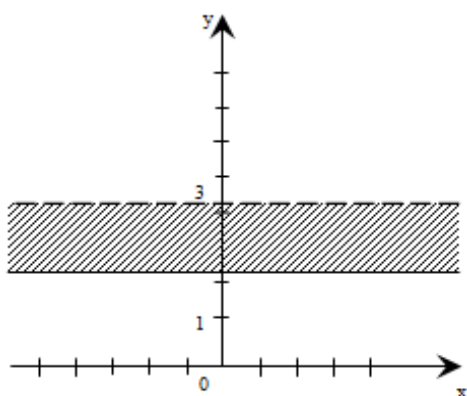
Koordinata tekisligida shunday koordinatali nuqtalarni tasvirlaymizki, bunda  $A$  to'plam  $Ox$  o'qida va  $B$  to'plam  $Oy$  o'qida olinadi.



1.8-rasm.

$$A = \{-2; 2\}; B = \mathbb{R}$$

$$A = [-2; 4]; B = \mathbb{R}$$



Dekart ko'paytmaning xossalari:

1°.  $A \times B \neq B \times A$ .

2°.  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ .

3°.  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

Ikkitadan ortiq to'plamlarning dekart ko'paytmasini ham qarash mumkin. Umumiy holda  $A_1, A_2, \dots, A_n$  to'plamlar berilgan bo'lsin. Ularning dekart ko'paytmasi  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2; \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$  dan iborat bo'ladi.  $(a_1; a_2; \dots, a_n)$  tartiblangan  $n$  lik deyiladi. (Masalan, uchlik, to'rtlik va h.k.). bunday tartiblangan  $n$  lik  $n$  o'rinli kortej deb ham ataladi. Yana  $n$  o'rinli kortejlar faqat bitta to'plam elementlaridan tuzilgan bo'lishi ham mumkin, bu holda u to'plamni o'z-o'ziga  $n$  marta dekart ko'paytmasi elementidan iborat bo'ladi.

Yuqorida aytilganlardan xulosa qilsak, Dekart koordinata tekisligini haqiqiy sonlar to'plami  $\mathbb{R}$  ni o'ziga-o'zining dekart ko'paytmasi  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , koordinata fazosini  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  deb qarash mumkinligi kelib chiqadi.<sup>7</sup>

$A$  va  $B$  to'plamlarning to'g'ri (dekart) ko'paytmasi  $A \times B$  ko'rinishida belgilanib, u quyidagicha aniqlanadi:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Masalan, 1.  $\{1, 3\} \times \{a, c\} = \{(1, a), (1, c), (3, a), (3, c)\}$ .

2.  $N \times N = \{(m, n) : m, n \in N\}$ .<sup>8</sup>

$A_1, A_2, \dots, A_n$  to'plamlarning to'g'ri (dekart) ko'paytmasi  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  esa quyidagicha aniqlanadi:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Agar bu to'plamlar bir-biriga teng bo'lsa,  $A \times A \times \dots \times A$  ni  $A^n$  ko'rinishida yozishimiz mumkin, ya'ni  $A \times A \times \dots \times A = A^n$ , shuningdek  $n=1$  hol uchun  $A = A^1$  tenglikka ega bo'lamiz. Agar  $A \times B$  dagi binar munosabat  $f$  uchun  $afb$  va  $af$  dan  $a = s$  kelib chiqsa, u holda  $A$  to'plamni  $B$  to'plamga o'tkazuvchi funktsiya (akslantirish) berilgan deyiladi. Odatda  $afb = f(a) = b$  ko'rinishda belgilaymiz.<sup>9</sup>

### Elementar konstruksiyalar - eski to'plamlardan yangisiga

Biz berilgan to'plamning, ya'ni ko'p quvvatli to'plamning elementar konstruksiyasiga duch keldik. Ya'ni,  $S$  to'plam bo'lsa, unda  $2^S$  to'plamning barcha qism to'plamlarining to'plamidir. Bundan tashqari biz 189-betdagi teoremada agar  $S$  to'plam  $n$  elementlarini ichiga olgan cheklangan to'plam bo'lsa, u holda  $2^S$  ko'p quvvatli to'plam  $2^n$  elementlarini o'z ichiga olishini ko'rdik (qaydni birinchi navbatda quvvatlaydi!). Keyin  $A$  va  $B$  to'plamlar bo'lsin. Biz  $A$  va  $B$  elementlaridan hosil qilingan barcha  $(a, b)$  tartiblangan juftliklar to'plami  $A \times B$  Dekart ko'paytmani hosil qilamiz. Formal ravishda:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ va } b \in B\}$$

Yuqoridan ko'ramizki, biz  $\mathbb{R}^2$  Dekart tekisligini  $\mathbb{R}$  haqiqiy chiziqning  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ni o'z ichiga olgan Dekart ko'paytmasi natijasi deb hisoblashimiz mumkin. Shunga o'xshash,  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  Dekart 3-fazosidir.

<sup>7</sup> David Surovski *Advanced High-School Mathematics*. 2011. 425s. 195 - bet mazmunidan olingan

<sup>8</sup> Herbert Gintis, *Mathematical Literacy for Humanists*, p.p19-22, 27 betlar mazmuni olingan

<sup>9</sup> Herbert Gintis, *Mathematical Literacy for Humanists*, p.p19-22, 27 betlar mazmuni olingan

Bu yerda o'ylab ko'rish uchun bir juft konstruktsiya berilgan. Balki siz  $h$  balandlik va  $r$  radiusning to'g'ri dumaloq silindri  $S \times [0, h]$ , ya'ni bu yerda  $S$   $h$  radiusning aylanasi sifatida ko'rgandirsiz.

So'ng,  $S \times S$  ikki aylananing Dekart ko'paytmasi natijasi sifatida *tor* (teshikkulchaning sirti)<sup>10</sup> bilan aniqlanishini ko'rishingiz mumkinmi?

Nihoyat,  $A$  va  $B$  cheklangan to'plam bo'lsa, unda  $|A \times B| = |A| \times |B|$  bo'lishi aniq ko'rinib turibdi.

Mashqlar

1.  $n$  musbat tub son bo'lsin va  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  bo'lsin.  $T \subseteq S \times S$  qism to'plamini  $T = \{(a, b) \in S \times S \mid |a - b| = 1\}$  orqali aniqlang.  $|T|$  ni  $n$  ning funksiyasi sifatida hisoblang.
2.  $n$  musbat tub son bo'lsin va  $S$  yuqoridagi masala kabi bo'lsin.  $Z \subseteq S \times S \times S$  qism to'plamini  $Z = \{(a, b, c) \in S \times S \times S \mid a, b, c \text{ hammasi farqli}\}$  orqali aniqlang.  $|Z|$  ni  $n$  ning funksiyasi sifatida hisoblang.
3.  $X$  va  $Y$  to'plamlar bo'lsin va  $C, D \subseteq Y$  bo'lsin.  $X \times (C \cup D) = (X \times C) \cup (X \times D)$  bo'lishini isbotlang.
4.  $X$  va  $Y$  to'plamlar,  $A, B \subseteq X$  va  $C, D \subseteq Y$  bo'lsin.  $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$  bo'lishi har doim ham to'g'ri bo'ladimi?
5.  $T$  va  $T'$  4.1.2 bo'limidagi 7-mashqda aniqlangan to'plamlar bo'lsin. Quyidagi izohlarning qaysi biri to'g'ri:  
 $T \in S \times S, T \subseteq S \times S, T \in 2^S, T \subseteq 2^S$   
 $T' \in S \times S, T' \subseteq S \times S, T' \in 2^S, T' \subseteq 2^S$

### Nazorat uchun savollar:

1. To'plamlar ayirmasining ta'rifini berjng.
2. Xossalarini ayting va asoslang.
3. To'ldiruvchi to'plam ta'rifini bering.
4. To'ldiruvchi to'plam xossalarini ayting va asoslang.
5. To'plamlarning dekart ko'paytmasini asoslang.

<sup>10</sup> Siz qiziqishinging mumkin bo'lgan *tor* ning parametrlari berilgan.  $R$  va  $r < R$  bo'lgan musbat haqiqiy sonlar bo'lsin. quyidagi parametrik tengliklar  $r+R$  tashqi radius va  $R-r$  ichki radiusning *tor* ini ifodalaydi:

$$\begin{aligned} X &= (R+r \cos \theta) \cos \theta \\ Y &= (R-r \cos \theta) \sin \theta \\ Z &= r \sin \theta. \end{aligned}$$