

19-amaliy mashg'ulot: Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik asosda qurish:

Matematik induksiya metodi.

Amaliy mashg'ulotining rejasi:

- 1. Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik qurish haqida tushuncha.**
- 2. Peano aksiomalari.**
- 3. Matematik induksiya metodi**

1. Nazariyani aksiomatik qurish to'g'risida. Har bir fanni bayon etishda tushunchalarga nisbatan turlicha mulohaza yuritiladi. Chunki bu tushunchalarning ayrimlari o'z-o'zidan tushuniladigan tushunchalar bo'lsa, ayrim tushunchalar esa ma'lum tushunchalarga asoslangan holda mantiqiy mulohazalar yuritish asosida ta'riflanadi.

Boshqacha aytganda, tushunchalar ta'riflanmaydigan va ta'riflanadigan tushunchalarga bo'linadi. *Tariflamaydigan tushunchalar insonning ko'p asrlik amaliy-ijodiy faoliyatining natijasi bo'lib, ular boshlang'ich tushunchalar deb yuritiladi.*

Bularsiz, har qanday nazariyani, aksiomatik qurish uchun boshlang'ich tushunchalar asosida nazariyaning aksiomalari tuziladi. Aksiomalar isbotlanmaydigan mulohazalar bo'lib, biri ikkinchisining natijasi sifatida kelib chiqmasligi va biri ikkinchisini inkor etmasligi zarur. Shuningdek, berilgan nazariyani aksiomatik qurishda uning teoremlarini isbotlash uchun aksiomalar yetarli bo'lishi zarur.

Amaliyot shuni ko'rsatadiki, bitta nazariya bir necha yo'llar bilan aksiomatik qurilishi mumkin. Bu yo'llar bir-biridan tanlab olingan boshlang'ich tushuncha va munosabatlari, ularga oid aksiomalar sistemasi bilan farqlanadi.

Asosiy tushunchalar, munosabatlar va aksiomalar kiritilgandan keyin nazariyaning rivojlanishi faqat mantiqiy fikrlash asosida boradi. Aksiomatik nazariyani qurishda tushuncha, munosabat va aksiomalar ixtiyoriy bo'lmasdan, ular ba'zi bir haqiqiy ob'yektlar va ularning xossalari yaqqol ko'rsatishi lozim. Masalan, ixtiyoriy uchta A , B va M nuqtalar uchun, M nuqtadan A va B nuqtalargacha masofalarning yig'indisi bu nuqtalar orasidagi masofadan kichik degan aksioma aytilsa, u holda haqiqatan hayotga aloqasi bo'lmagan nazariya yuzaga kelar edi, haqiqatda esa $|MA| + |MB| \geq |AB|$. Shunday qilib, aksiomatik nazariya reallikning matematik modelini berishi kerak.

Agar munosabatlari bilan berilgan to'plamda aksiomalar sistemasini barcha aksiomalari bajarilsa, u holda munosabatlari bilan berilgan to'plam aksiomalar

sistemasini modeli deyiladi. Biz quyidagi aksiomalar sistemasining modellarini qaraylik. Aksiomalar sistemasi modeli real dunyo xossalarini aniqroq ifodalashi uchun ular mantiqan bir qancha talablarni bajarishi lozim.

Birinchi navbatda aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz bo'lishi kerak. Boshqacha aytganda berilgan aksiomalar sistemasida bir paytda rost va yolg'on tasdiq kelib chiqmasligi kerak.

Ikkinchidan, aksiomalar sistemasi bir-biriga bog'liq bo'lmasligi, ya'ni bir aksioma aksiomalar sistemasining boshqa aksiomalaridan kelib chiqmasligi kerak. Agar biz yuqoridagi sistemani 4- aksiomasini agar $a \sim b$ va $b \sim c$ bo'lsa, u holda $a \sim c$ deb olsak, u aksioma ortiqcha bo'ladi, chunki uni boshqa aksiomalardan keltirib chiqarish mumkin.

Uchinchidan, aksiomalar sistemasi qat'iy bo'lishi kerak.

2. Peano aksiomatikasi.

Natural sonlarni qo'shish tushunchasi natural sonlar to'plami aksiomatikasini qurish uchun yagona asos emas. Shuning bilan birga bu tushuncha sodda emas. Ma'lumki, n natural soniga m natural sonini qo'shishni qadamma-qadam, ya'ni qadamga yana bitta birlikni qo'shish yordamida hosil qilamiz. Masalan, $5+3=(((5+1)+1)+1)$.

Shuning uchun, qo'shish operatsiyasini eng sodda ya'ni 1 sonini qo'shish operatsiyasiga keltirish mumkin. $n+1$ soni bevosita n sonidan keyin kelganligi uchun keyingi songa o'tish to'g'risida gapirish mumkin. Shunga ko'ra, natural sonlar to'plamida asosiy tushuncha sifatida « b soni a sonidan bevosita keyin keladi» tushunchasini tanlash mumkin.

Natural sonlar nazariyasini aksiomatik qurishda Peano ta'riflanmaydian tushuncha sifatida "natural son" va ta'riflanmaydian munosabat sifatida "...dan keyin keladi" degan munosabatni asos qilib olgan.

Peano aksiomalari:

1. Hech qanday sondan keyin kelmaydigan 1 soni mavjud.

Bu aksiomadan ko'rinadiki, natural sonlar to'plamida birinchi element aniqlanib bo'lib, u 1 sonidan iboratdir.

2. Har qanday a son uchun undan bevosita keyin keluvchi faqat va faqat bitta son a^* soni mavjud. Ya'ni $a=b \Rightarrow a^*=b^*$.

Bu aksioma natural sonlar to'plamining cheksiz ekanligini ifodalaydi.

3. 1 dan boshqa ixtiyoriy natural son faqat va faqat bitta natural sondan keyin keladi $a^*=b^* \Rightarrow a=b$.

Bu aksiomadan ko'rinadiki, natural sonlar to'plami qat'iy tartiblangan to'plamdir.

4. Agar biror F qoida 1 soni uchun o'rinli ekanligi isbotlangan bo'lsa va uning n natural soni uchun o'rinli ekanligidan navbatdagi natural son $n+1$ uchun to'g'riligi kelib chiqsa, bu F qoida barcha natural sonlar uchun o'rinli bo'ladi.

Bu aksioma matematik induksiya aksiomasi deyiladi va unga matematik induksiya metodi asoslanadi.

3. Matematik induksiya metodi.

Matematik induksiya metodini bilish matematika fanini chuqur egallash, uning ichki sirlarini chuqur anglab yetishda muhim o'rin tutadi.

Deduktiv va induktiv mulohaza yuritish umumiy xulosa chiqarishda har doim ham qo‘l kelavermaydi. Chunki ko‘p hollarda cheksiz ko‘p xususiy hollarni ko‘rib chiqqandan so‘nggina, umumiy xulosa chiqarish mumkin bo‘ladi. Umumiy xulosa chiqarishda matematik induksiya metodi eng qulay va oson metod hisoblanadi. U quyidagilardan iboratdir:

I. $n = 1$ uchun berilgan $A(n)$ predikatning rostligi tekshiriladi. (Agar $n = 1$ uchun berilgan $A(n)$ predikat rost bo‘lsa, navbatdagi qadamga o‘tiladi, aksincha bo‘lsa, u holda berilgan predikat barcha n lar uchun yolg‘on deb, umumiy xulosa chiqariladi.)

II. $n = k$ uchun $A(n)$ predikat rost deb faraz qilinadi.

III. $n = k+1$ uchun $A(n)$ predikatning rostligi, ya‘ni $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$ isbotlanadi. Shundan so‘ng, $A(n)$ predikat n ning barcha qiymatlarida rost deb umumiy xulosa chiqariladi.

Misollar. a) $1+2+3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ predikat berilgan bo‘lsin. Uni $A(n)$ deb belgilaymiz va barcha natural sonlar uchun rostligini isbot qilamiz.

Isbot. *I. $n = 1$ uchun tekshiramiz, u holda*

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \Rightarrow 1 = 1.$$

Demak, $n = 1$ uchun $A(n)$ predikat rost.

II. $n = k$ uchun $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ ni, ya‘ni $A(k)$ predikatni rost deb faraz qilamiz.

III. $n = k + 1$ uchun $A(k + 1)$ predikatning rostligini, ya‘ni

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

to‘g‘riligini isbotlaymiz:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1) + 1]}{2}. \end{aligned}$$

Bu esa $A(k + 1)$ mulohazaning o‘zidan iboratdir. Demak, $A(n)$ predikat n ning barcha qiymatlarida rost.

b) $(n^3+2n):3$ ekanligini matematik induksiya metodi yordamida isbotlang.

Yechish. *I. $n = 1$ da $1^3+2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow 3:3$.*

II. $n = k$ da $(k^3+2k):3$ deb faraz qilaylik.

III. $n = k + 1$ da $[(k+1)^3+2(k+1)]:3$ ekanligini isbotlaymiz.

Isbot.

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = \\ &= (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) = (k^3 + 2k) + 3 \cdot (k^2 + k + 1). \end{aligned}$$

Bu yig‘indi 3 ga karrali, chunki birinchi qo‘shiluvchi $(k^3 + 2k):3$ — farazga asosan, ikkinchi qo‘shiluvchi 3 ga karrali ekanligi ko‘rinib turibdi: $3 \cdot (k^2 + k + 1):3$. Demak, $(n^3 + 2n):3$ bo‘ladi.

d) $(n^3 + 11n) : 6$ bo'lsa, uni matematik induksiya metodi yordamida isbotlang.

Yechish.

I. $n=1$ da $1^3 + 11 \cdot 1 = 1 + 11 = 12 \Rightarrow 12 : 6$.

II. $n = k$ da $(k^3 + 11k) : 6$ deb faraz qilaylik,

III. $n = k + 1$ da $[(k+1)^3 + 11(k+1)] : 6$ ni isbotlaymiz.

Isbot. $(k + 1)^3 + 11(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 1k + 11 = (k^3 + 12k) + (3k^2 + 3k + 12) = (k^3 + 12k) + 3(k^2 + k + 4)$.

Bunda $(k + 12) : 6$ — farazga asosan, $3 \cdot [k^2 + k + 4]$ — bu ifodaning 3 ga karrali ekanligi ko'rinib turibdi, $(k^2 + k + 4)$ ifoda esa 2 ga karrali. Demak, $(n^3 + 11n) : 6$ bo'ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik qurish haqida tushuncha bering.
2. Peano aksiomalarini ayting.
3. **Matematik induksiya** haqida tushuncha bering.