17-amaliy mashg‘ulot: . Ko‘paytmaning ta’rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Ko‘paytirish qonunlari. Ko‘paytmaning yig‘indi orqali ta’rifi.

Amaliy mashg‘ulotining rejasi:

1. **Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasi ta’rifi.**
2. **Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasining mavjudligi va yagonaligi.**
3. **Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasining xossalari.**

1. Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasi.
$a = n(A)$ va $b = n(B)$ bo‘lgan a va b nomanfiy butun sonlar berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. a va b nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasi deb, $A\times B$ dekart ko‘paytma elementlari sonini ifodalovchi c nomanfiy butun songa aytiladi. Bu yerda $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$ ekanini eslatib o‘tamiz. Demak, ta’rifga ko‘ra:

$a\cdot b = n(A\times B) = c$, bu yerda $a, b, c\in N_0$,

$a\cdot b = c$ yozuvda a - 1-ko‘paytuvchi, b - 2-ko‘paytuvchi, c - ko‘paytma deyiladi, $c\in N_0$ sonni topish amali esa *ko‘paytirish* deyiladi.

Masalan, ta’rifga ko‘ra 5 • 2 ko‘paytmani topaylik. Buning uchun $n(A) = 5$ va $n(B) = 2$ bo‘lgan $A = \{a; b; c; d; e\}$, $B = \{1; 2\}$ to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini tuzamiz:

$A\times B=\{(a;1), (a;2), (b;1), (b;2), (c;1), (c;2), (d;1), (d;2), (e;1), (e;2)\}$. Dekart ko‘paytma elementlari soni 10 ta bo‘lgani uchun $5\cdot 2= 10$.

2. Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasining mavjudligi va yagonaligi.

Teorema. Ikkita nomanfiy butun son ko‘paytmasi mavjud va yagonadir.

Ko‘paytmaning mavjudligi va yagonaligi berilgan sondagi elementlardan tashkil topgan to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini tuzish har doim mumkinligi va dekart ko‘paytma elementlari soni to‘plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog‘liq emasligi bilan isbotlanadi.

3. Ko‘paytirish amalining xossalari.

1°. Ko‘paytirish amali kommutativdir:

$(\forall a, b\in N_0)\ ab = ba$.

Isbot. $a = n(A)$ va $b = n(B)$, $A\cap B = \emptyset$ bo‘lsin. $A\times B\neq B\times A$, shunga qaramay, $A\times B\sim B\times A$ (bunda istalgan $(a,b)\in A\times B$ juftlikka $(b,a)\in B\times A$ juftlik mos keltiriladi):

$$A\times B\sim B\times A\Rightarrow n(A\times B) = n(B\times A),$$

$$ab = n(A\times B) = n(B\times A) = ba\Rightarrow ab = ba.$$

2°. Ko‘paytirish amali assotsiativdir:

$$(\forall a, b, c\in N_0)\ (ab)c = a(bc).$$

Isboti. $(ab)c = \boldsymbol{n(A)}, b = \boldsymbol{n(B)}, c = \boldsymbol{n(C)}$ va $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ lar juft- jufti bilan kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lsin:

$$(ab)c=n((A\times B)\times C \text{ va } a(bc)=n(A\times(B\times C)).$$

Yuqoridagi dekart ko‘paytmalar doirasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish yo‘li bilan $(A\times B)\times C \sim A\times(B\times C)$ ekanini ko‘rsatish mumkin (kombinatorika bo‘limidagi ko‘paytma qoidasini eslang). Demak:

$$(ab)c = n((A\times B)\times C = n(A\times(B\times C) = a(bc).$$

3°. Ko‘paytirishning qo‘shishga nisbatan distributivligi:

$$(\forall a, b,\ c\ \in N_0)\ (a + b)c = ac + bc.$$

Isbot. $a = n(A), b = n(B),\ c = n(C$ va $A,\ B,$ Clar juft-jufti bilan kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lsin. To‘plamlar nazariyasidan malumki, $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$ va $A\cap B = \emptyset \Rightarrow (A\times C)n\ \ n(B\times C) = \times$ chunki, $A\times C$ *va* $B\times C$ dekart ko‘paytmalar elementlari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

$$(a + b)\cdot c = n((A\cup B)\times C) = n((A\times C)\cup(B\times C)) =$$
$$= n(A\times C) + n(B\times C) = ac + bc.$$

Demak, $(a + b)c = ac + bc$.

4°. Yutuvchi elementning mavjudligi:

$$(\forall a\in N_0)\ a\cdot 0 = 0.$$

Is b o t. $a = n(A)$, $0 = n(\emptyset)$ bo‘lsin. $A\times\emptyset = \emptyset$ ekanligidan

$$a\times 0 = n(A\times\emptyset) = n(\emptyset) = 0.$$

5°. Ko‘paytirish amalining monotonligi:

$$(\forall a,\ b, c\in N_0,\ c\neq 0)\ a > b\Rightarrow ac > bc;$$
$$(\forall a,b,c\in N_0)\ a\geq b\Rightarrow ac\geq bc;$$
$$(\forall a,\ b,\ c\in N_0,\ c\neq 0)\ a<b\Rightarrow ac<bc.$$

Isbot. Namuna uchun 1-jumlani isbotlaymiz.

$a > b \Rightarrow B\sim A,\ \subset A,$ bu yerda $n(A) = a,\ n(B) = b,\ A_1\neq\emptyset,\ A_1\neq A.$

U holda $B\times C\sim(A_1\times C)\subset(A\times C)$.

Demak, $n(B\times C) = n(A_1\times C)<n(A\times C) \Rightarrow bc<ac.$

6°. Ko‘paytmaning qisqaruvchanligi:

$(\forall a,b,c\in N_0,\ c\neq 0)\ ac = bc\Rightarrow a = b.$

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik: $a\neq b$ bo‘lsin. U holda yoki $a < b$, yoki $a > b$ bo‘lishi kerak. $a < b$ bo‘lsa, $ac < bc$ bo‘lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak, $a = b$ ekan.

Ko‘paytmaga yigindi orqali ta’rif berish ham mumkin.

11-ta’rif. $a, b\in N_0$ bo‘lsin. a sonning b soniga ***ko‘paytmasi*** *deb, har biri a ga teng bo‘lgan b ta qo‘shiluvchining yig‘indisiga aytiladi.*

$$ab = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{b marta}}.$$

Bundan $a\cdot 1 = a$ *va* $a\cdot 0 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta’rif $a = n(A),\ b = n(B),\ A\wedge B = \emptyset$ bo‘lgan $A\times B$ dekart ko‘paytma elementlarini sanash malum bir qonuniyatga asoslanishiga bog‘liq.[1]

Miso1. $A = \{a;\ b;\ c\},\ B = \{x;\ y;\ z;\ t\}.$

$A\times B$ dekart ko‘paytmani quyidagi jadval ko‘rinishida yozamiz:

(a; x)	*(a;y)*	*(a; z)*	*(a; t)*
(b; x)	*(b; y)*	*(b ; z)*	*(b; t)*
(c; x)	*(c;y)*	*(c; z)*	*(c; t)*

Dekart ko‘paytma elementlarini ustunlar bo‘yicha sanasak, $3\times4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ ga ega bo‘lamiz.

Nazorat uchun savollar:

1. Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasi ta’rifini ayting.
2. Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasining mavjudligi va yagonaligini asoslang.
3. Nomanfiy butun sonlar *ko‘payt*masining xossalarini ayting va asoslang.