

15-ma'ruza: Ayirish va bo'lishning ta'rifi.

Ma'ruza mashg'ulotining rejasi:

1. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi, uning mavjudligi va yagonaligi.
2. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasining xossalari.
3. Ko'paytirish jadvalini tuzish

Ma'ruza matni

Natural sonlarni ko'paytirish amali ta'rifi va xossalari. Har biri a ga teng bo'lgan b ta natural son yig'indisi $\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ ta}}$ anitopish talab qilingan

bo'lsin. Bunday ko'rinishdagi yigindini hisoblash ko'p hollarda amaliy jihatdan qiyinchilik tug'diradi. Shuning uchun bir xil qo'shiluvchilar yig'indisini topishni osonlashtirish maqsadida yangi amal kiritiladi. Bu amal ko'paytirish amali deb yuritiladi.

Ta'rif. Har biri a ga teng bo'lgan b ta qo'shiluvchining yig'indisini topishga ko'paytirish amali deyiladi.

U $a \times b$ yoki $a \cdot b$ ko'rinishda belgilanib, a sonining b soniga ko'paytmasi deb ataladi.

Demak, $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ ta}}$. Bunda $a \cdot b$ — ko'paytma, a , b — ko'paytuvchilar deb yuritiladi.

Ko'paytirish amalining aksiomatik ta'rifi quyidagicha:

Ta'rif. a natural sonining b natural soniga ko'paytmasi deb, shunday algebraik operatsiyaga aytiladiki, unda

- 1) $a \cdot 1 = a$,
- 2) $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$ bo'ladi.

Bu ta'rif yordamida bir xonali sonlar uchun ko'paytirish jadvalini tuzishimiz mumkin.

Masalan, a) 2 ni ko'paytirish jadvalini tuzaylik:

$$\begin{aligned}2 \cdot 1 &= 2 \\2 \cdot 2 &= 2 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \\2 \cdot 3 &= 2 \cdot (2 + 1) = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 = 6 \\2 \cdot 4 &= 2 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 3 + 2 = 6 + 2 = 8\end{aligned}$$

b) 3 ni ko'paytirish jadvalini tuzaylik:

$$\begin{aligned}3 \cdot 1 &= 3 \\3 \cdot 2 &= 3 \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 1 + 3 = 6 \\3 \cdot 3 &= 3 \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 2 + 3 = 6 + 3 = 9 \\3 \cdot 4 &= 3 \cdot (3 + 1) = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12\end{aligned}$$

Ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. *Distributivlik xossasi (chapan)*. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, ya'ni natural sonning boshqa ikki natural son yig'indisiga ko'paytmasi, shu sonning har bir qo'shiluvchi bilan ko'paytmasining yig'indisiga teng.

Isbot. Bu xossani isbotlashda matematik induksiya metodidan foydalanamiz.

$c = 1$ uchun $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1 = a \cdot b + a$ to'g'ri bo'ladi.

$c = n$ uchun $a \cdot (b + n) = ab + an$ to'g'ri deb faraz qilamiz.

$c = n + 1$ uchun bu xossaning to'g'riligini isbotlaymiz.

$a \cdot (b + n + 1) = a \cdot [(b + n) + 1] = a(b + n) + a \cdot 1 = [ta'rifga asosan] = ab + an + a = [farazga asosan] = ab + a(n + 1) = [ta'rifga asosan].$

Demak, $a \cdot (b + c) = ab + ac$ bo'ladi.

2°. *Distributivlik xossasi (o'ngdan)*. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ bo'ladi, ya'ni ikkita son yig'indisining uchinchi son bilan ko'paytmasi, har bir sonning uchinchi son bilan ko'paytmasining yig'indisiga teng.

Isbot. Buni matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$c = 1$ uchun $(a + b) \cdot c = (a + b) \cdot 1 = a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1$ to'g'ri bo'ladi.

$c = n$ uchun $(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$ to'g'ri deb faraz qilamiz.

$c = n + 1$ uchun $(a + b) \cdot (n + 1)$ ni to'g'ri bo'lishini isbotlaymiz.

$(a + b)(n + 1) = (a + b) \cdot n + (a + b) = [ta'rifga asosan] = an + bn + a + b = [farazga asosan] = an + a + bn + b = [yigindining o'rin almashtirish xossasiga asosan] = a(n + 1) + b(n + 1) [ko'paytirish ta'rifiga asosan].$

Demak, $(a + b)(n + 1)$ uchun yuqoridagi xossa to'g'ri ekan. Bundan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ bo'ladi.

3°. *Ko'paytirishning o'rin almashtirish xossasi*. $a \cdot b = b \cdot c$, ya'ni ko'paytuvchilarning o'rnini o'zgartirish bilan ko'paytma o'zgarmaydi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$a + 1$ uchun $1 \cdot b = b = b \cdot 1$ bo'lib, bu xossa o'rinli bo'ladi.

$a = n$ uchun $n \cdot b = b \cdot n$ deb faraz qilaylik.

$a = n + 1$ uchun to'g'ri ekanligini isbotlaylik.

$a \cdot b = (n + 1) \cdot b = nb + 1 \cdot b = [ko'paytirishning chapdan distributivlik xossasiga asosan] = b \cdot n + b = [farazga asosan] = b \cdot (n + 1) [ko'paytirishning o'ngdan distributivlik xossasiga asosan].$

Demak, $(n + 1)b = b \cdot (n + 1)$. Bundan $a \cdot b = b \cdot a$ ekanligi kelib chiqadi.

4°. *Ko'paytirishning guruhlash xossasi*. $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ bo'ladi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida isbotlaymiz.

$(a \cdot b) \cdot 1 = ab = a \cdot (b \cdot 1)$ to'g'ri bo'ladi.

$c = n$ uchun $(a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n)$ deb faraz qilamiz. $c = n + 1$ uchun to'g'riligini isbotlaymiz.

$(a \cdot b) \cdot (n + 1) = (a \cdot b) \cdot n + ab = [ko'paytirish ta'rifiga asosan] = a \cdot (b \cdot n) + a \cdot b = [farazga asosan] = a(b \cdot n + b) = a(b \cdot (n + 1)) [ko'paytirishning distributivlik xossasiga asosan]. Demak, (a \cdot b)(n + 1) = a(b \cdot (n + 1)). Bundan (a \cdot b)c = a(b \cdot c).$

Natija. Har qanday natural sonning 0 soni bilan ko'paytmasi nolga teng.

Haqiqatan ham, $0 \cdot a = \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{a \text{ ta}} = 0$.

Nazorat uchun savollar:

1. Natural sonlarni qo‘shish ta’rifini ayting.
2. Natural sonlarni qo‘shish xossalari ayting va asoslang.
3. Nomanfiy butun sonlar **ko‘paytmasita** ta’rifini ayting, uning mavjudligi va yagonaligi haqidagi fikrni asoslang.
4. Nomanfiy butun sonlar **ko‘paytmasining** xossalari ayting va asoslang.

Ma’ruza mashg‘ulotining rejasi:

1. Ayirish va bo‘lishning ta’rifi.
2. Nolga bo‘lishning mumkin emasligi.
3. Qoldiqli bo‘lish.

Ma’ruza matni.

Ayirish amalining ta’rifi va xossalari. Aytaylik, bizga ikkita qo‘shiluvchining yig‘indisi a va qo‘shiluvchilardan biri b berilgan holda ikkinchi qo‘shiluvchini topish talab qilinsin. Demak, shunday x sonini topish kerakki, bunda $a = b + x$ bo‘lsin.

1-ta’rif. Berilgan a sonda b sonni **ayirish** deb, b ga qo‘shganda a hosil bo‘ladigan x sonni topishga aytiladi.

Bunda: a — kamayuvchi, b — ayiriluvchi; x — ayirma deb yuritiladi va $x = a - b$ ko‘rinishda yoziladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchi bilan ayirmaning yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Demak, $a - b = x \Rightarrow a = b + x$. Bundan ko‘rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchidan katta bo‘ladi, ya’ni $a > b$. Nomanfiy butun sonlar to‘plamida kamayuvchi ayiriluvchidan katta yoki unga teng bo‘lgan holdagina ayirish amali aniqlangan bo‘ladi. Ya’ni $a \geq b$ bo‘lgan holda $a - b$ ayirma mavjud bo‘ladi.

Ayirish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar ikki sonning ayirmasiga ayiriluvchi qo‘shilsa, kamayuvchi hosil bo‘ladi, ya’ni $a - b = c$ bo‘lsa, $a = b + c$ bo‘ladi.

Isbot. Ta’rifga asosan $a = b + c$ yoki $c + b = a$. Lekin

$$c = a - b \Rightarrow c + b = (a - b) + b = a.$$

2°. Agar ikki son yig‘indisidan qo‘shuvchilardan biri ayirilsa, ikkinchi qo‘shiluvchi hosil bo‘ladi, ya’ni

$$(\forall a, b \in \mathbb{N}) [(a + b) - b = a].$$

3°. Berilgan songa ikki sonning ayirmasini qo‘shish uchun kamayuvchini qo‘shib, ayiriluvchini ayirish kifoya, ya’ni

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a + (b - c) = (a + b) - c].$$

4°. Berilgan sonda yig‘indini ayirish uchun bu sonda qo‘shiluvchilarni birin-ketin ayirish kifoya, ya’ni

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [(a - (b + c)) = a - b - c].$$

5°. Berilgan sonda ayirmani ayirish uchun kamayuvchini ayirib, ayiriluvchini qo‘shish kifoya, ya’ni

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a - (b - c) = (a - b) + c].$$

Natural sonlarni bo'lish ta'rifi va xossalari.

2-ta'rif. Ikki ko'paytuvchining ko'paytmasi va bir ko'paytuvchi berilgan holda ikkinchi ko'paytuvchini topish amali bo'lish amali deyiladi.

Bunda berilgan ko'paytmani ifodalovchi son — *bo'linuvchi*, berilgan ko'paytuvchi — *bo'luvchi*, izlanayotgan ko'paytuvchi — *bo'linma* deyiladi.

Agar a — ko'paytma, b — berilgan ko'paytuvchi, c — izlanayotgan ko'paytuvchi bo'lsa, u bo'lish amali yordamida $\frac{a}{b} = c$ yoki $a : b = c$ ko'rinishda belgilanadi. Ta'rifdan ko'rinadiki, bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal ekan.

Bo'lishamali bir qiymatlidir. Masalan, a) $9:3=3$; b) $21:7=3$; d) $111:3=37$.

Bo'lish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. Ko'paytmani noldan farqli biror songa bo'lish uchun ko'paytuvchilardan birini shu songa bo'lish kifoya, ya'ni $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$, bunda $a : c$ bo'ladi, ya'ni a soniga butun marta bo'linadi.

Isbot. $(a \cdot b) : c = x$ desak, $a \cdot b = c \cdot x$. Lekin, $(a : c) \cdot c = x$ bo'ladi.

U holda $(a : c) \cdot c \cdot b = c \cdot x \Rightarrow (a : c) \cdot b = x \Rightarrow (a : c) \cdot b = (ab) : c$ bo'ladi.

2°. Biror sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish uchun shu sonni bo'linuvchiga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmani bo'luvchiga bo'lish kifoya, ya'ni $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a(b : c) = (ab) : c]$.

Isbot. $a \cdot (b : c) = x$ bo'lsin.

Tenglikning ikkala tomonini c ga ko'paytirsak, $a \cdot (b : c) \cdot c = xc$ bo'ladi.

Lekin $(b : c) \cdot c = b$ bo'ladi. Bundan $ab = xc$. U holda ta'rifga asosan $(ab) : c = x$ bo'ladi. Demak, $(ab) : c = a \cdot (b : c)$.

3°. $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b]$.

Isbot. $a : (b \cdot c) = x$ desak, $a = bc \cdot x$ bo'ladi. Tenglikning ikkala tomonini b ga bo'lsak $a : b = c \cdot x$ bo'ladi. U holda bo'lish ta'rifga asosan $(a : b) : c = x$ bo'ladi.

Demak, $(a : b) : c = (a : c) : b$ bo'ladi.

4°. $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) [a : (b : c) = ac : b]$.

Isbot. $a : (b : c) = x$ desak, $a = (b : c) \cdot x$ bo'ladi. U holda tenglikning ikkala tomonini c ga ko'paytirsak, $a \cdot c = [(b : c) \cdot c] \cdot x$ bo'ladi. Bunda $(b : c) \cdot c = b$ ekanligidan $a \cdot c = b \cdot x$ bo'ladi. Bundan $(a \cdot c) : b = x$ bo'ladi. Demak, $a : (b : c) = (ac) : b$.

5°. $(\forall a, b \in \mathbb{N}_0, c \in \mathbb{N}) (a : c \wedge b : c) \Rightarrow [(a + b) : c = a : c + b : c]$.

Isbot. $(a + b) : c = x$ bo'lsin. U holda $a = (a : c) \cdot c$ va $b = (b : c) \cdot c$. Bundan $(a : c) \cdot c + (b : c) \cdot c = cx$ yoki $[(a : c) + (b : c)] : c = cx$ yoki $a : c + b : c = x$. Bundan $a : c + b : c = (a + b) : c$ bo'ladi.

6°. $(\forall a, b \in \mathbb{N}_0, \forall c \in \mathbb{N}) (a : c \wedge b : c) \Rightarrow (a - b) : c = a : c - b : c$.

Isbot. $(a - b) : c = x$ desak, $a - b = cx$ bo'ladi. $a = (a : c) \cdot c$ va $b = (b : c) \cdot c$ desak, $(a : c) \cdot c - (b : c) \cdot c = cx$, bundan $[(a : c) - (b : c)] : c = cx$. U holda tenglikning ikkala tomonini c ga bo'lsak, $a : c - b : c = x$. Demak, $a : c - b : c = (a - b) : c$.

Nazorat uchun savollar

1. Ayirish va bo'lishning ta'riflarini ayting.
2. Sonni nolga bo'lib bo'lmasligini tushuntiring.
3. Qachon qoldikli bo'lish bajariladi?