12-maruza: Ko’paytmaning ta’rifi, uning mavjudligi va yagonaligi.

Ma’ruza mashg‘ulotining rejasi:

1. Nomanfiy butun sonlar **ko‘payt**masi ta’rifi.
2. Nomanfiy butun sonlar **ko‘payt**masining mavjudligi va yagonaligi.
3. **Nomanfiy butun sonlar** ko‘payt**masining xossalari.**

Ma’ruza matni

1. Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasi.

$a = n(A)$ va $b = n(B)$ bo‘lgan a va b nomanfiy butun sonlar berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. a va b nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasi deb, $A\times B$ dekart ko‘paytma elementlari sonini ifodalovchi c nomanfiy butun songa aytiladi. Bu yerda $A\times B= \{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$ ekanini eslatib o‘tamiz. Demak, ta’rifga ko‘ra:

$a\cdot b = n(A\times B) = c$, *bu yerda* $a, b, c\in N_0$,

$a\cdot b = c$ yozuvda a - 1-ko‘paytuvchi, b - 2-ko‘paytuvchi, c - ko‘paytma deyiladi, $c\in N_0$ sonni topish amali esa *ko‘paytirish* deyiladi.

Masalan, ta’rifga ko‘ra 5 • 2 ko‘paytmani topaylik. Buning uchun $n(A) = 5$ va $n(B) = 2$ bo‘lgan $A = \{a; b; c; d; e\}$, $B = \{1; 2\}$ to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini tuzamiz:

$A\times B=\{(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2), (c; 1), (c; 2), (d; 1), (d; 2), (e; 1), (e; 2)\}$. Dekart ko‘paytma elementlari soni 10 ta bo‘lgani uchun $5\cdot 2= 10$.

2. Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasining mavjudligi va yagonaligi.

Teorema. Ikkita nomanfiy butun son ko‘paytmasi mavjud va yagonadir.

Ko‘paytmaning mavjudligi va yagonaligi berilgan sondagi elementlardan tashkil topgan to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini **tuzish har doim mumkinligi va dekart ko‘paytma elementlari soni to‘plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog‘liq emasligi bilan isbotlanadi.**

3. Ko‘paytirish amalining xossalari.

1°. Ko‘paytirish amali kommutativdir:

$(\forall a, b\in N_0)\ ab =ba$.

*I*sbot. $a = n(A)$ va $b = n(B)$, $A\cap B =\emptyset$ bo‘lsin. $A\times B\neq B\times A$, shunga qaramay, $A\times B\sim B\times A$ (bunda istalgan $(a,b)\in A\times B$ juftlikka $(b,a)\in B\times A$ juftlik mos keltiriladi):

$$A\times B\sim B\times A\Rightarrow n(A\times B) = n(B\times A),$$

$$ab = n(A\times B) = n(B\times A) = ba\Rightarrow ab =ba.$$

2°. Ko‘paytirish amali assotsiativdir:

$$(\forall a, b, c\in N_0)\ (ab)c =a(bc).$$

Isboti. $(ab)c = \boldsymbol{n(A)}, b = \boldsymbol{n(B)}, c = \boldsymbol{n(C)}$ va $\boldsymbol{A, B, C}$ lar juft- jufti bilan kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lsin:

$$(ab)c= n((A\times B)\times C \text{ va } a(bc)= n(A\times (B\times C)).$$

Yuqoridagi dekart ko‘paytmalar doirasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish yo‘li bilan $\boldsymbol{(A\times B)\times C\sim A\times (B\times C)}$ ekanini ko‘rsatish mumkin (kombinatorika bo‘limidagi ko‘paytma qoidasini eslang). Demak:

$$(ab)c = n((A\times B)\times C = n(A\times(B\times C) = a(bc).$$

3°. Ko‘paytirishning qo‘shishga nisbatan distributivligi:

$$(\forall a, b, c \in N_0)\ (a + b)c = ac + bc.$$

Isbot. $a = \boldsymbol{n(A)}, b = \boldsymbol{n(B)}, c = \boldsymbol{n(C}$ va $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ lar juft-jufti bilan kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lsin. To‘plamlar nazariyasidan malumki, $\boldsymbol{(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)}$ va $\boldsymbol{A\cap B = \emptyset \Rightarrow (A\times C)n\ \ n(B\times C)} = \times$ chunki, $\boldsymbol{A\times C}$ **va** $\boldsymbol{B\times C}$ dekart ko‘paytmalar elementlari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

$$(a + b)\cdot c = n((A\cup B)\times C) = n((A\times C)\cup(B\times C)) =$$
$$= n(A\times C) + n(B\times C) = ac + bc.$$

Demak, $(a + b)c = ac + bc$.

4°. Yutuvchi elementning mavjudligi:

$$(\forall a\in N_0)\ a\cdot 0 = 0.$$

Is b o t. $a = n(A)$, $0 = n\ (\emptyset)$ bo‘lsin. $A\times\emptyset = \emptyset$ ekanligidan

$$a\times 0 = n(A\times\emptyset) = n(\emptyset) = 0.$$

5°. Ko‘paytirish amalining monotonligi:

$$(\forall a, b, c\in N_0,\ c\neq 0)\ a > b \Rightarrow ac > bc;$$
$$(\forall a,b,c\in N_0)\ a\geq b \Rightarrow ac\geq bc;$$
$$(\forall a, b, c\in N_0,\ c\neq 0)\ a<b \Rightarrow ac<bc.$$

Isbot. Namuna uchun 1-jumlani isbotlaymiz.

$a > b \Rightarrow B\sim A, \subset A$, bu yerda $n(A) = a$, $n(B) = b$, $A_1\neq\emptyset$, $A_1\neq A$.

U holda $B\times C\sim(A_1\times C)\subset(A\times C)$.

Demak, $n(B\times C) = n(A_1\times C) < n(A\times C) \Rightarrow bc<ac$.

6°. Ko‘paytmaning qisqaruvchanligi:

$(\forall a,b,c\in N_0,\ c\neq 0)\ ac = bc \Rightarrow a = b.$

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik: $a\neq b$ bo‘lsin. U holda yoki $a < b$, yoki $a > b$ bo‘lishi kerak. $a < b$ bo‘lsa, $ac < bc$ bo‘lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak, $a = b$ ekan.

Ko‘paytmaga yigindi orqali ta’rif berish ham mumkin.

11-ta’rif. $a, b\in N_0$ *bo‘lsin. a sonning b soniga* ***ko‘paytmasi*** *deb, har biri a ga teng bo‘lgan b ta qo‘shiluvchining yig‘indisiga aytiladi.*

$$ab = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b\ \text{marta}}.$$

Bundan $a\cdot 1 = a$ va $a\cdot 0 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta’rif $a = n(A)$, $b = n(B)$, $A\wedge B = \emptyset$ bo‘lgan $A\times B$ dekart ko‘paytma elementlarini sanash malum bir qonuniyatga asoslanishiga bog‘liq.[1]

Misol. $A = \{a; b; c\}$, $B = \{x; y; z; t\}$.

$A\times B$ dekart ko‘paytmani quyidagi jadval ko‘rinishida yozamiz:

---

[1] Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики. Учебное пособие. Москва. «Академия». 2014 144-145 с. 142-144 betlarmazmuniolingan

(a; x)	*(a;y)*	*(a; z)*	*(a; t)*
(b; x)	*(b; y)*	*(b ; z)*	*(b; t)*
(c; x)	*(c;y)*	*(c; z)*	*(c; t)*

Dekart ko‘paytma elementlarini ustunlar bo‘yicha sanasak, $3\times4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ ga ega bo‘lamiz.

Nazorat uchun savollar:

1. Nomanfiy butun sonlar **ko‘payt**masi ta’rifini ayting.
2. Nomanfiy butun sonlar **ko‘payt**masining mavjudligi va yagonaligini asoslang.
3. Nomanfiy butun sonlar ***ko‘payt***masining xossalarini ayting va asoslang**.**